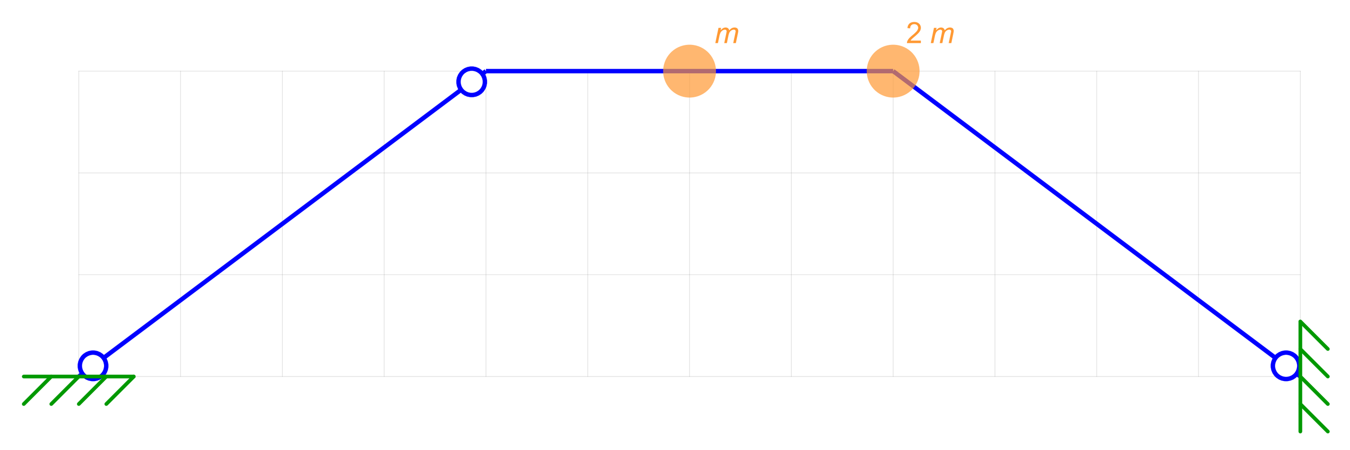
Kol 2.1 R.A. 2022/23

Zapisać równanie pozwalające na wyznaczenie częstości drgań własnych.

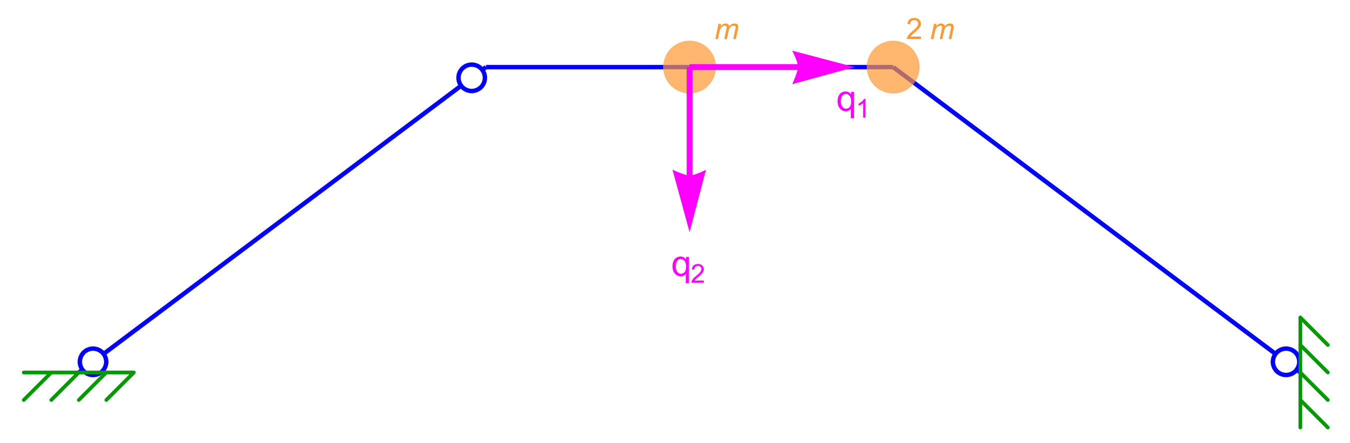
(Write down the equation which determines the angular frequencies of the natural vibrations).

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki - l):

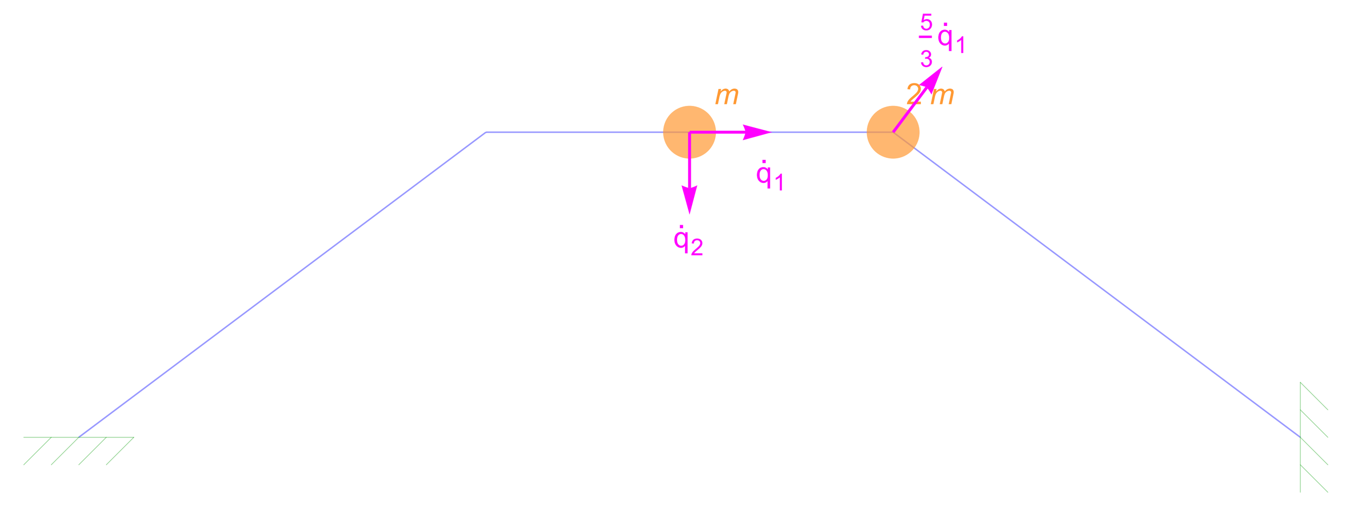


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

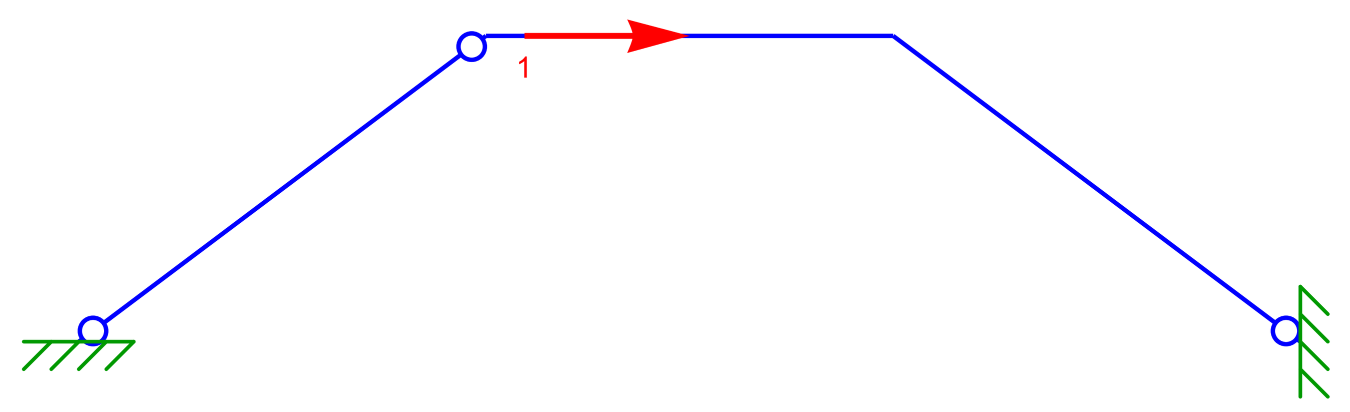
$2\,E_k(\dot{\mathbf{q}}) = m\,[\,\dot{q}_2^{\,2} + \dot{q}_1^{\,2}\,] + 2\,m\,(\tfrac{5}{3}\,\dot{q}_1)^2 = \tfrac{59}{9}\,m\,\dot{q}_1^{\,2} + m\,\dot{q}_2^{\,2} = \dot{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$

Macierz mas:

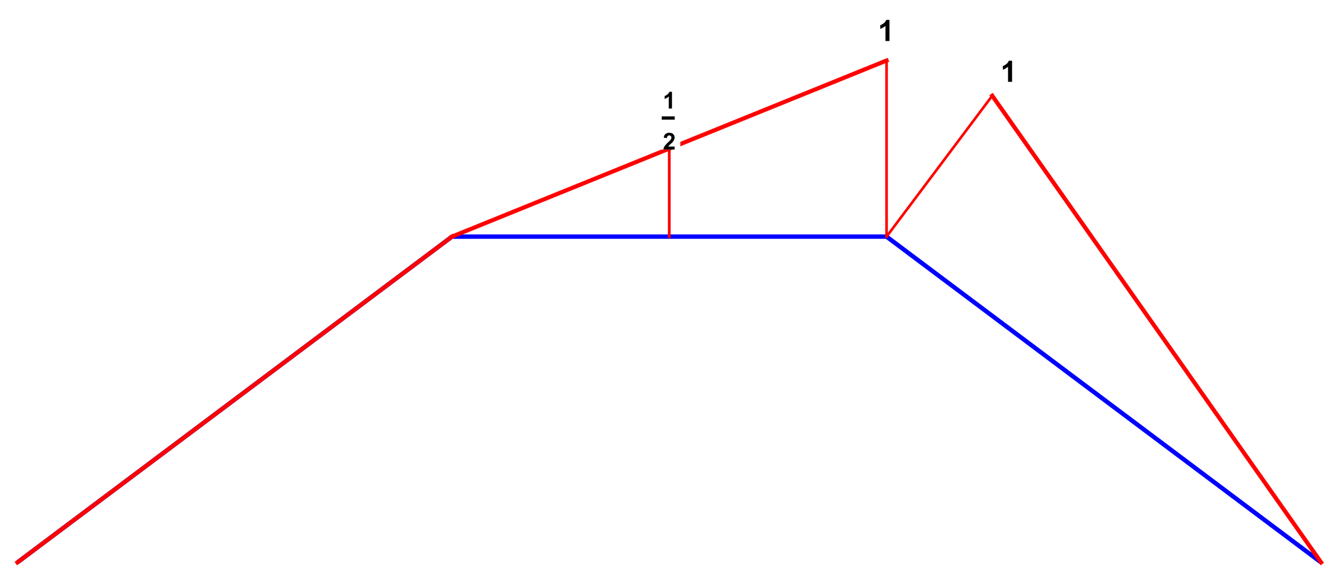
$$\mathbf{M} = m \begin{pmatrix} \frac{59}{9} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

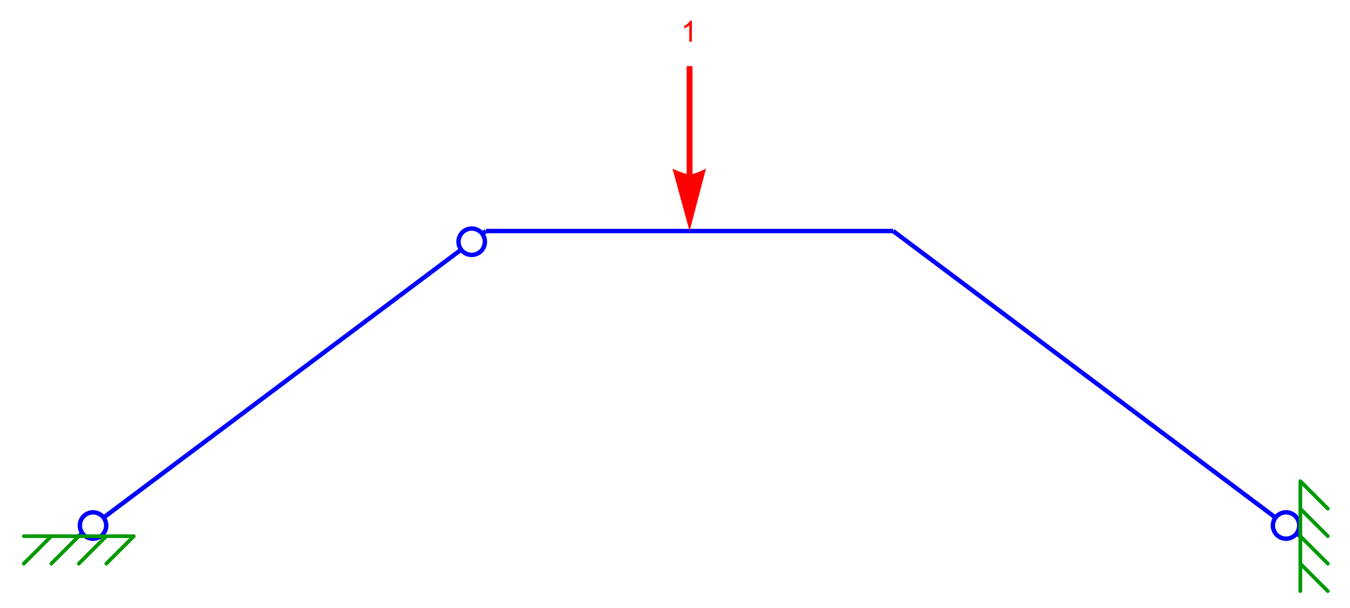
- od q_1:



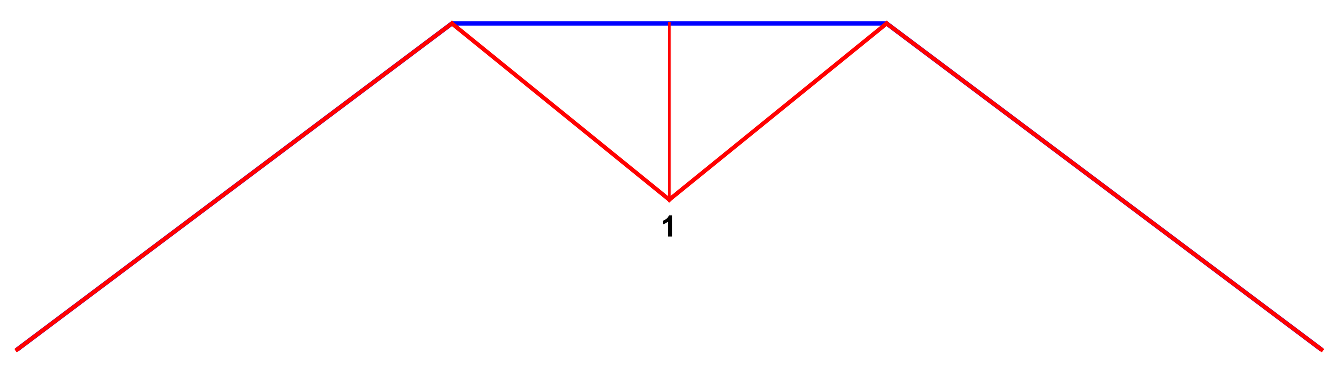
$M_1[l]$:



- od q_2:



$M_2[l]$:



Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}l+\frac{1}{3}\cdot l\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}l+\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_3 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_4 = 3\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot(-l)\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot(-l)\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot(-l)\right)\right]_3 = -\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_3 = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

ZADANIE DRGAŃ WŁASNYCH:

- poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}\sin(\omega t)$

- zadanie własne:

$(\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M})\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$

- równanie charakterystyczne $(\lambda = \frac{\omega^2 l^3 m}{EJ})$:

$\det(\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}) = 0$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\frac{59\lambda}{3} & \lambda \\ \frac{59\lambda}{9} & 1-\frac{4\lambda}{3} \end{pmatrix}\right) = 1 - 21\lambda + \frac{59\lambda^2}{3} = 0$$

$\lambda^{(1)} = 0.04996$, $\lambda^{(2)} = 1.01784$

Częstości drgań własnych:

$\omega^{(1)} = 0.224\,\frac{1}{\sqrt{\frac{l^3 m}{EJ}}}$, $\omega^{(2)} = 1.009\,\sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}}$

Postaci drgań własnych:

$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} -2.850 \\ 1.000 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.054 \\ 1.000 \end{pmatrix}$

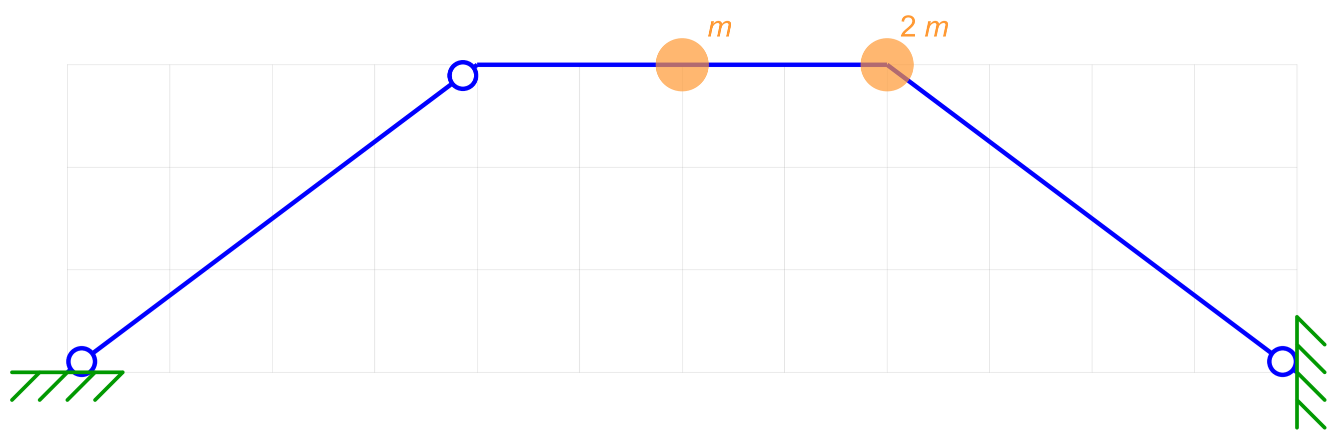
Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.

Kol 2.1 R.A. 2022/23

Zapisać równanie pozwalające na wyznaczenie częstości drgań własnych.

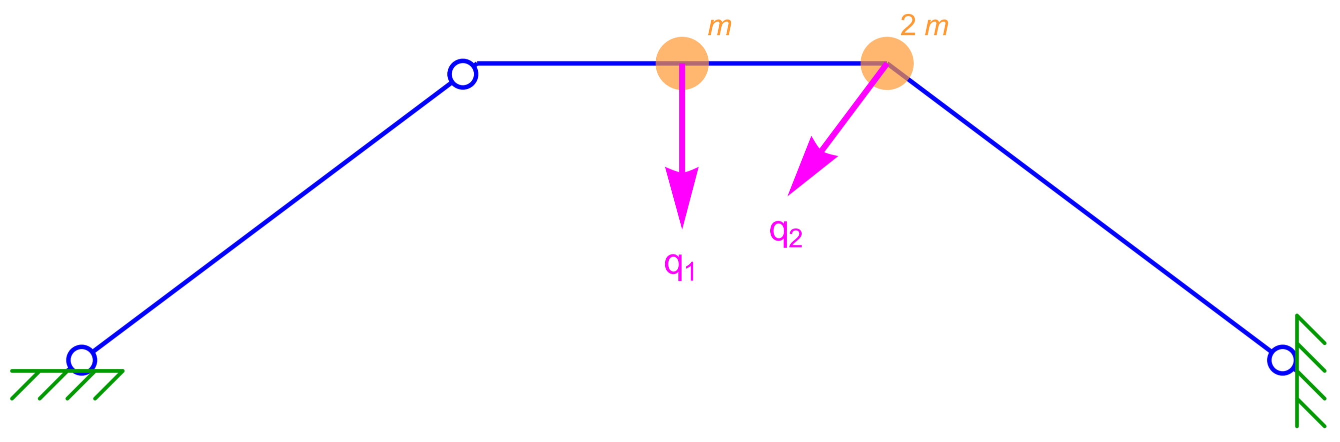
(Write down the equation which determines the angular frequencies of the natural vibrations).

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – l):

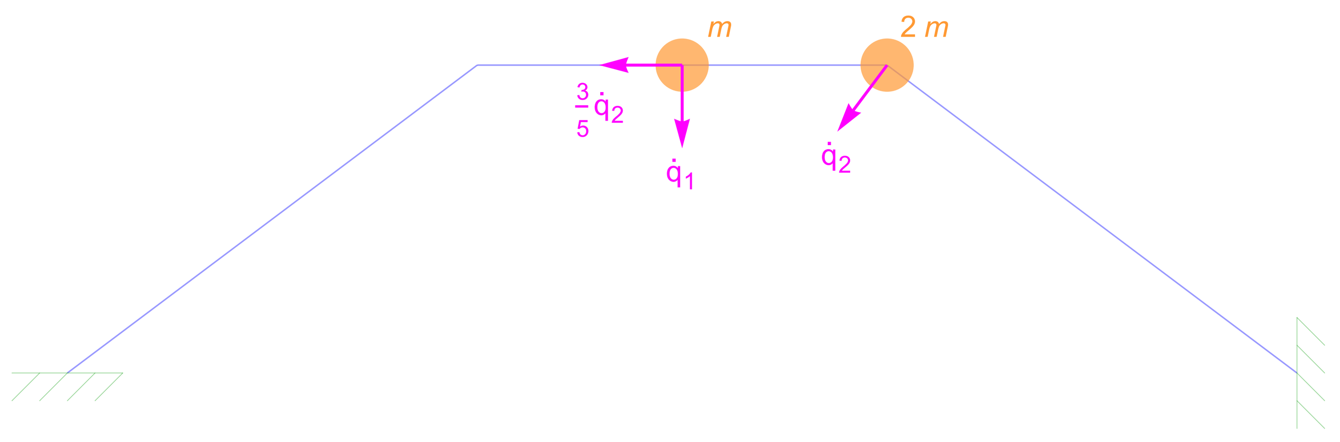


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

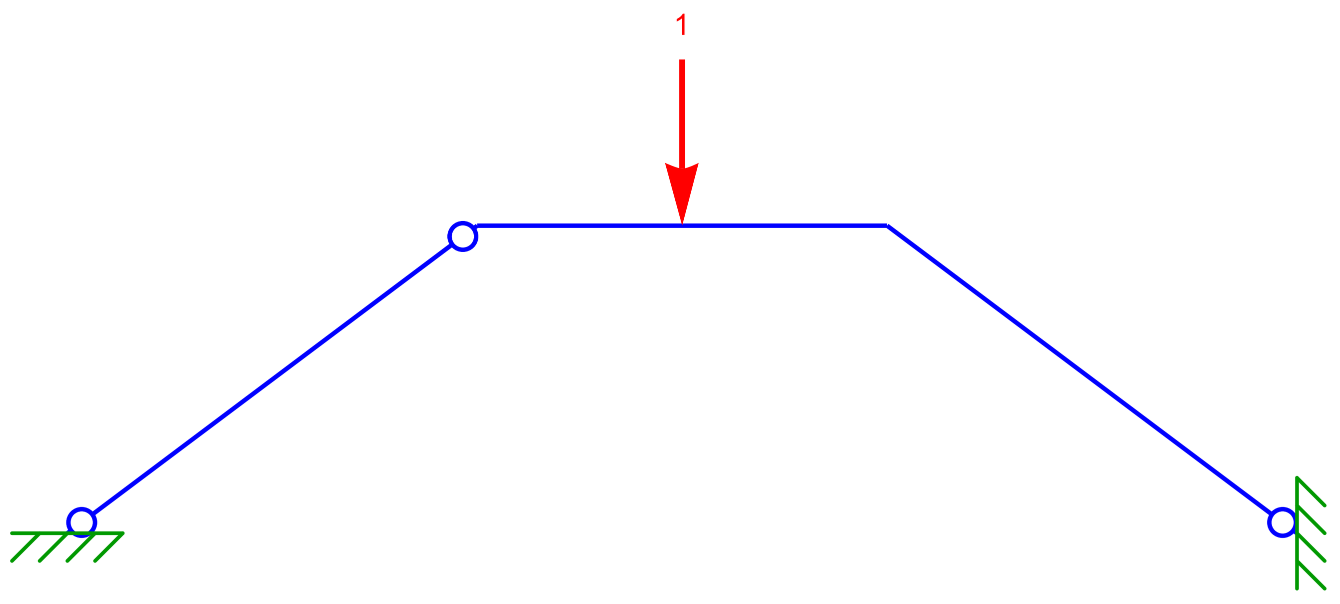
$2\,E_k\,(\dot{\mathbf{q}}) = m\,[\,(\frac{3}{5}\dot{q}_2)^2 + \dot{q}_1^2\,] + 2\,m\,\dot{q}_2^2 = m\,\dot{q}_1^2 + \frac{59}{25}\,m\,\dot{q}_2^2 = \dot{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$

Macierz mas:

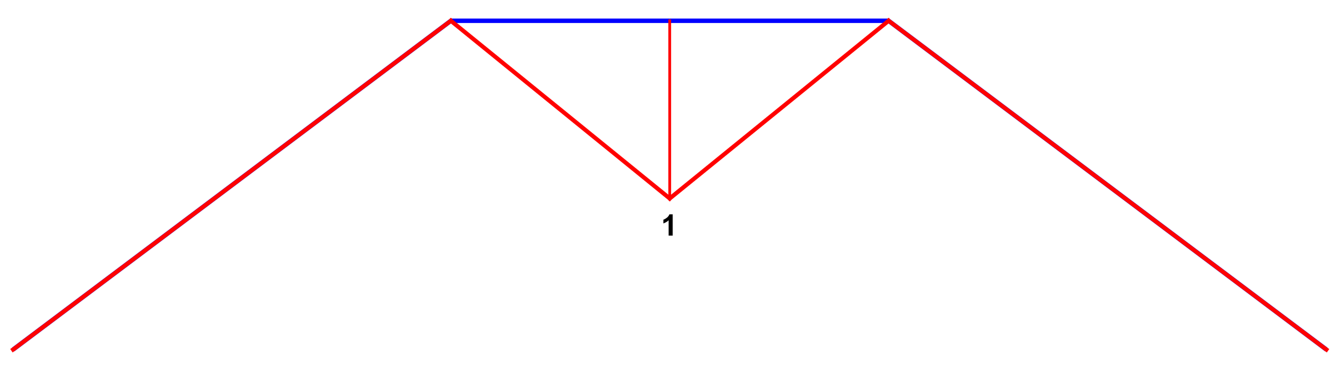
$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{59}{25} \end{pmatrix}$$

Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

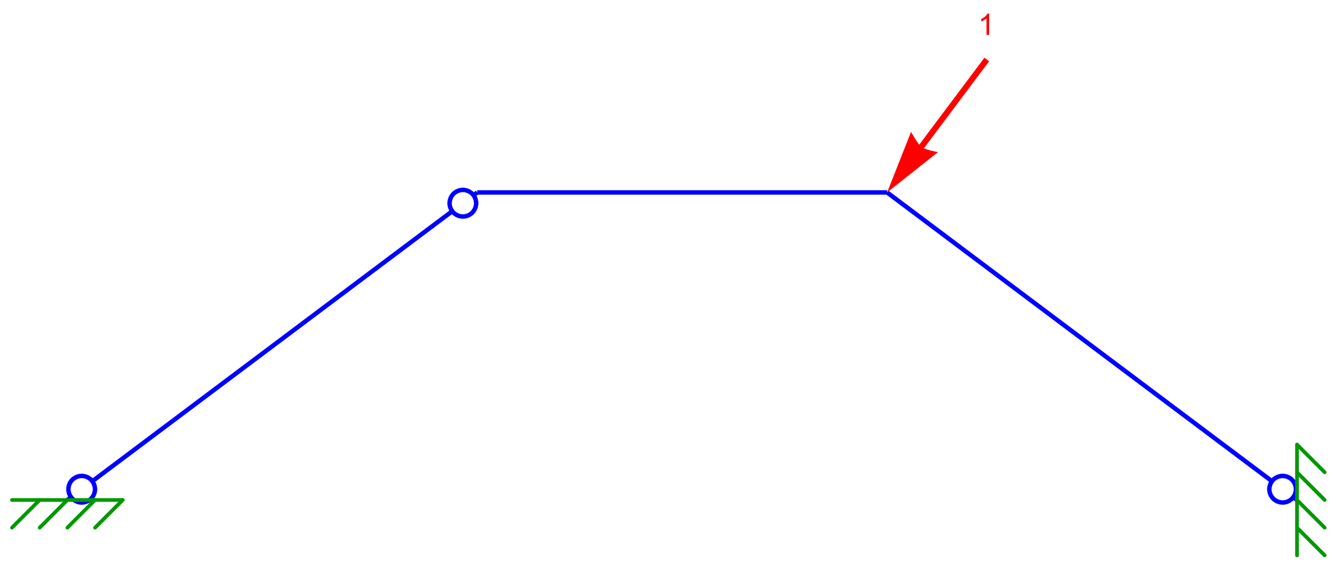
– od q_1:



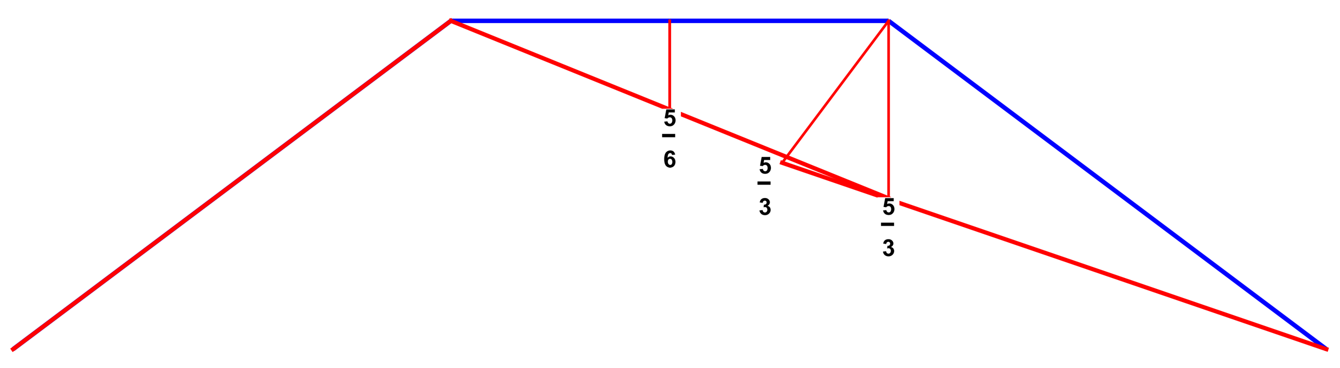
$M_1[l]$:



– od q_2:



$M_2[l]$:



Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}[(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l)(\frac{2}{3}\cdot l)]_2 + \frac{1}{EJ}[(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l)(\frac{2}{3}\cdot l)]_3 = \frac{4}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}[(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l)(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}l)]_2 + \frac{1}{EJ}[(\frac{1}{2}\cdot l\cdot 2\,l)(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}l+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}l)]_3 = \frac{5}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}[(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}l\cdot 2\,l)(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}l)]_2 + \frac{1}{EJ}[(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}l\cdot 2\,l)(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}l+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}l)+(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}l\cdot 2\,l)(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}l+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}l)]_3 + \frac{1}{EJ}[(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{3}l\cdot 5\,l)(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}l)]_4 = \frac{25}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{25}{3} \end{pmatrix}$$

ZADANIE DRGAŃ WŁASNYCH:

– poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$$\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{a}\sin(\omega t)$$

– zadanie własne:

$$(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,)\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

– równanie charakterystyczne ($\lambda = \frac{\omega^2\,l^3\,m}{EJ}$):

$$\det(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\frac{4\lambda}{3} & -\frac{59\lambda}{15} \\ -\frac{5\lambda}{3} & 1-\frac{59\lambda}{3} \end{pmatrix}\right) = 1 - 21\,\lambda + \frac{59\,\lambda^2}{3} = 0$$

$\lambda^{(1)} = 0.04996$, $\lambda^{(2)} = 1.01784$

Częstości drgań własnych:

$\omega^{(1)} = 0.224\,\frac{1}{\sqrt{\frac{l^3\,m}{EJ}}}$, $\omega^{(2)} = 1.009\,\sqrt{\frac{EJ}{l^3\,m}}$

Postaci drgań własnych:

$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.211 \\ 1.000 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -11.211 \\ 1.000 \end{pmatrix}$

Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.