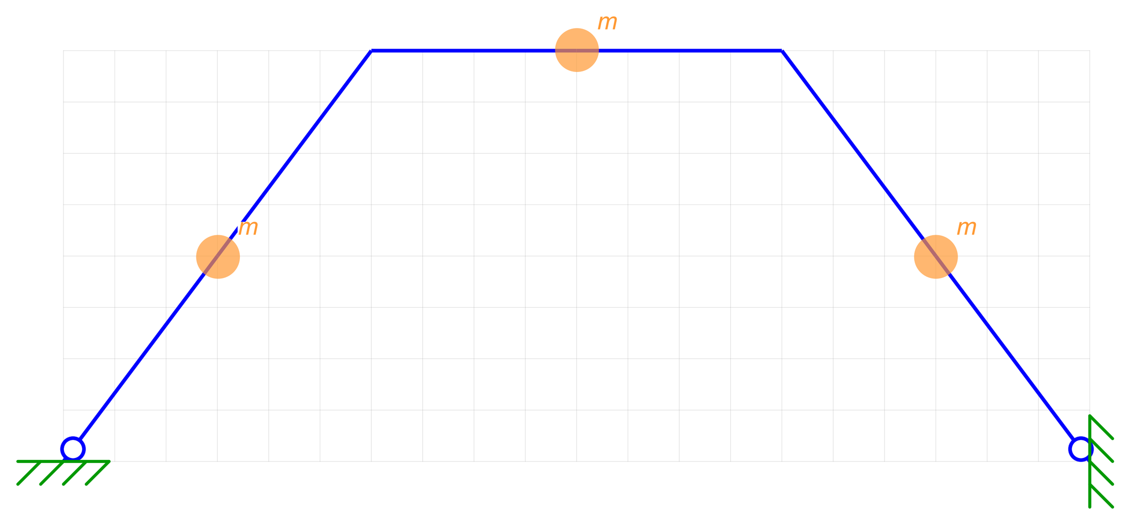
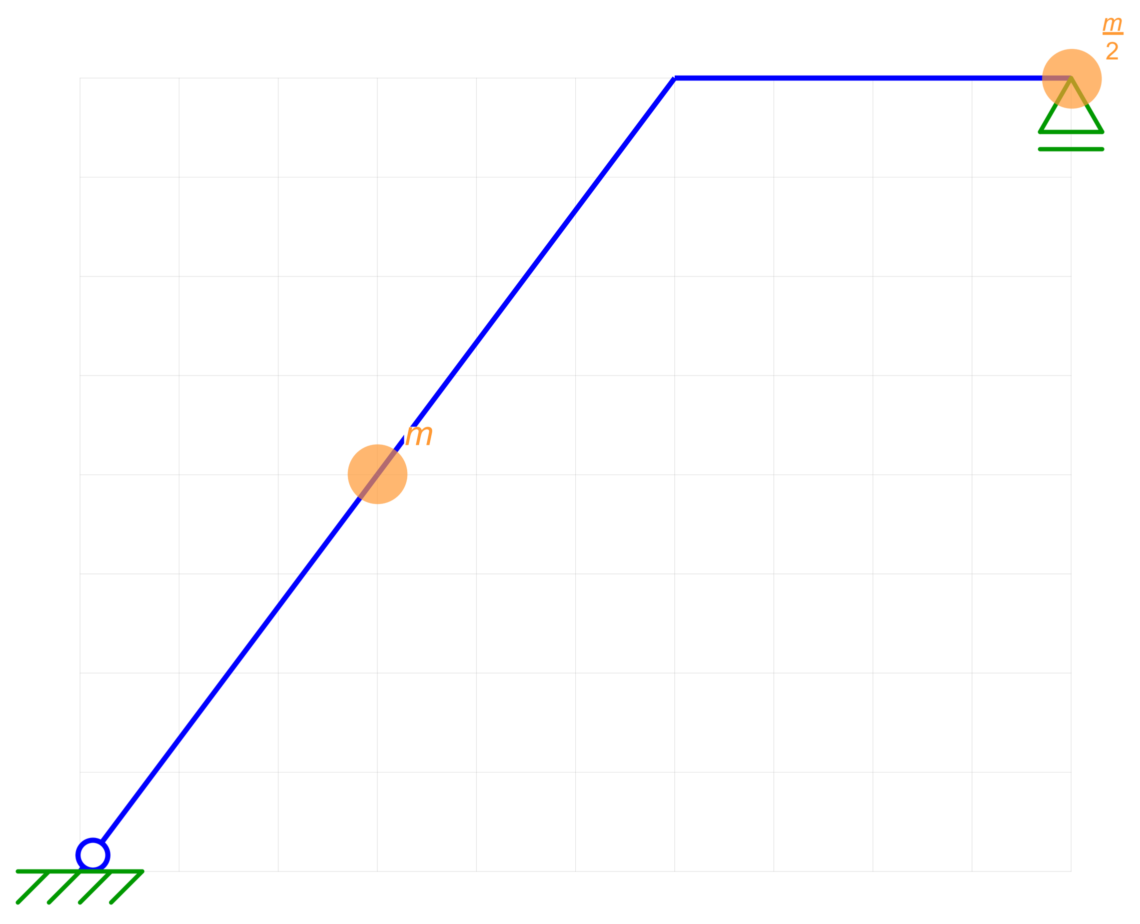
Kol 2, termin ratunkowy R.A. 2021/22

Obliczyć pierwszą częstość drgań własnych ANTYSYMETRYCZNYCH.



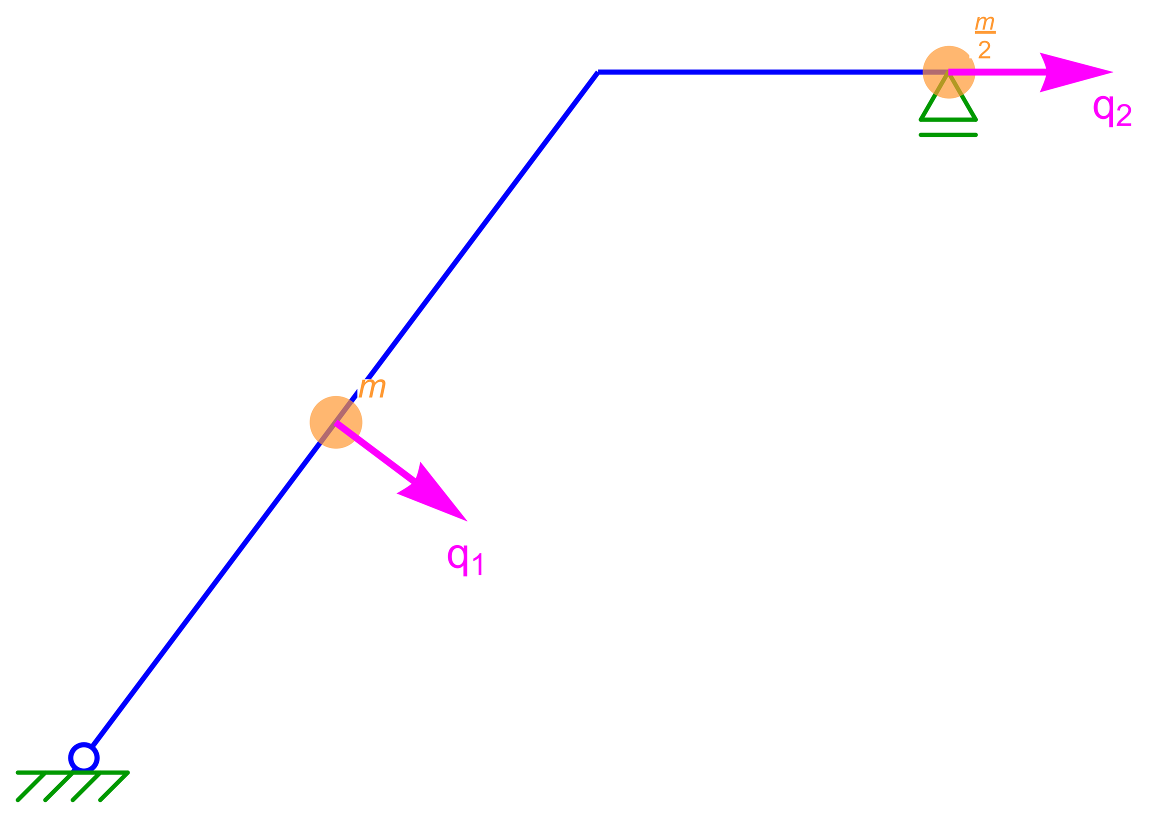
Schemat połówkowy przy założeniu drgań antysymetrycznych:

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki = l):

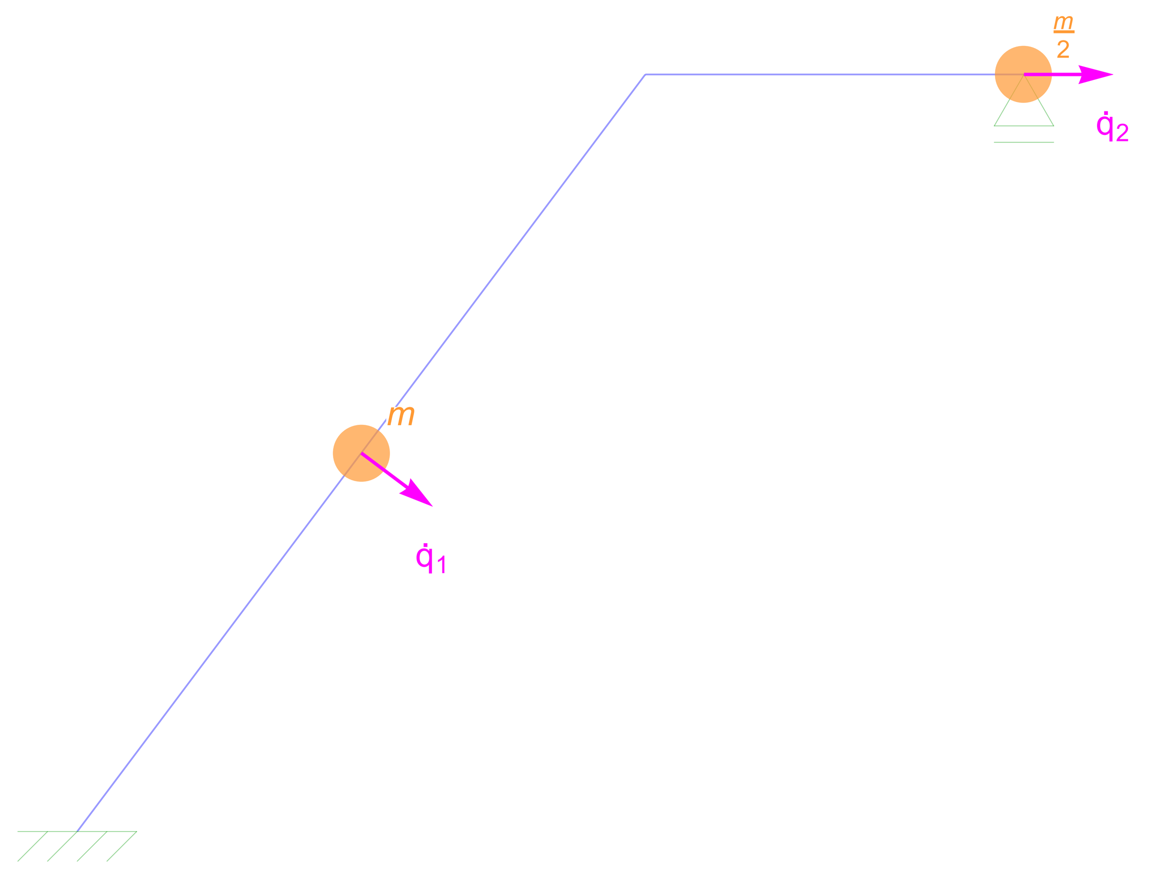


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

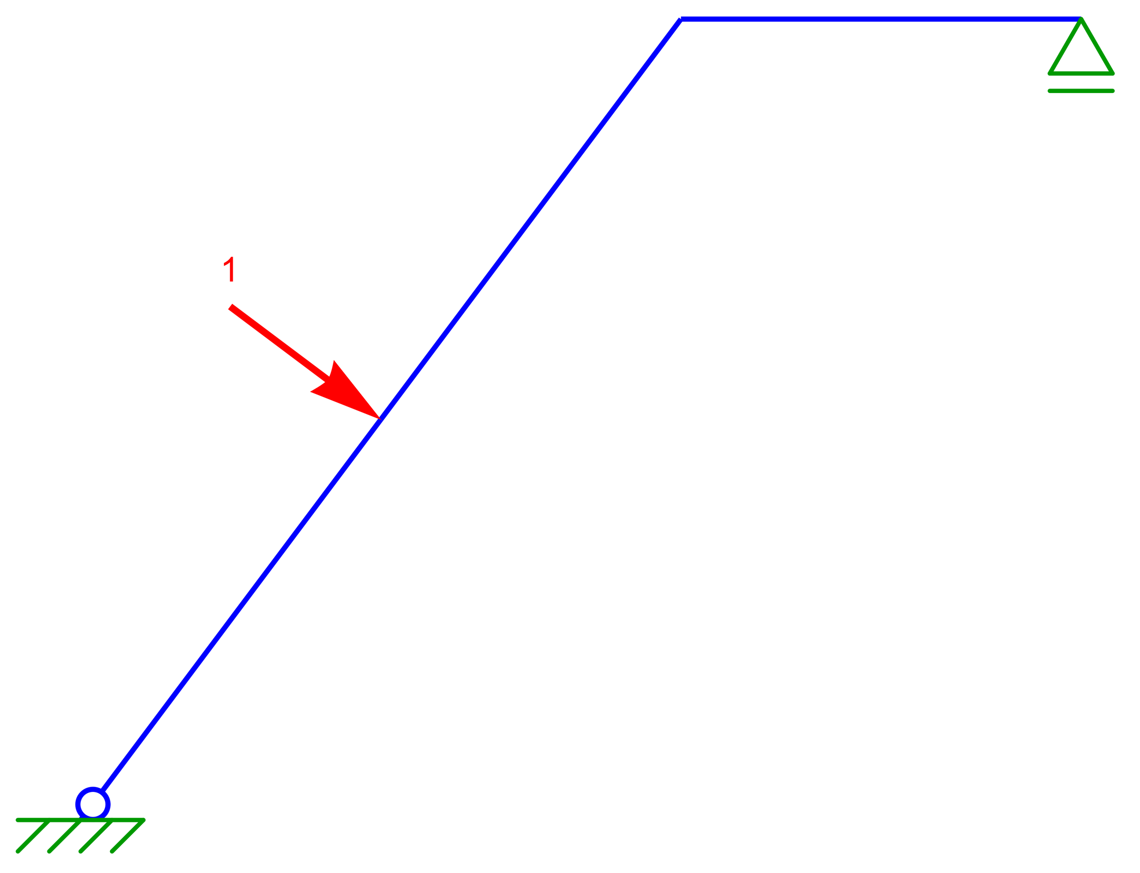
$$2\,E_k\,(\dot{\mathbf{q}}) = m\,\dot{q}_1{}^2 + \frac{m}{2}\,\dot{q}_2{}^2 = m\,\dot{q}_1{}^2 + \frac{1}{2}\,m\,\dot{q}_2{}^2 = \dot{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$$

Macierz mas:

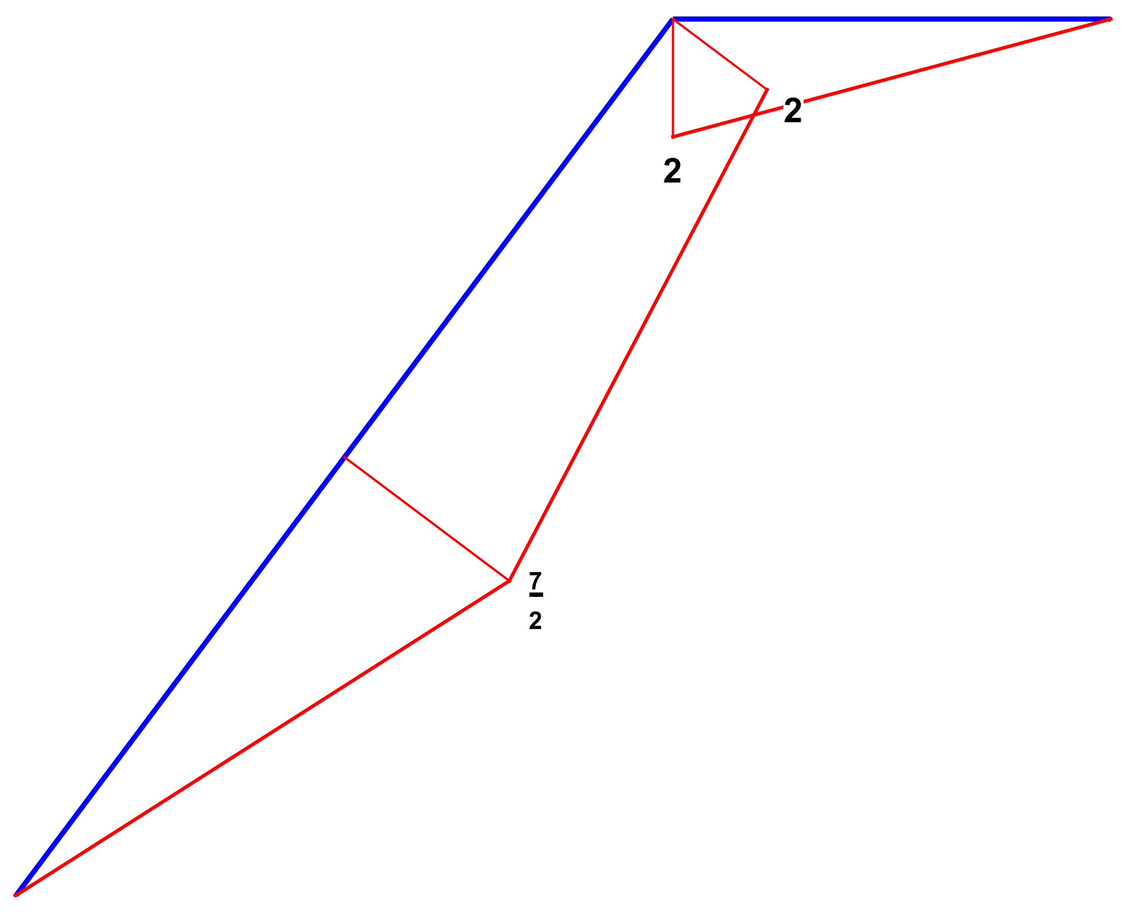
$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

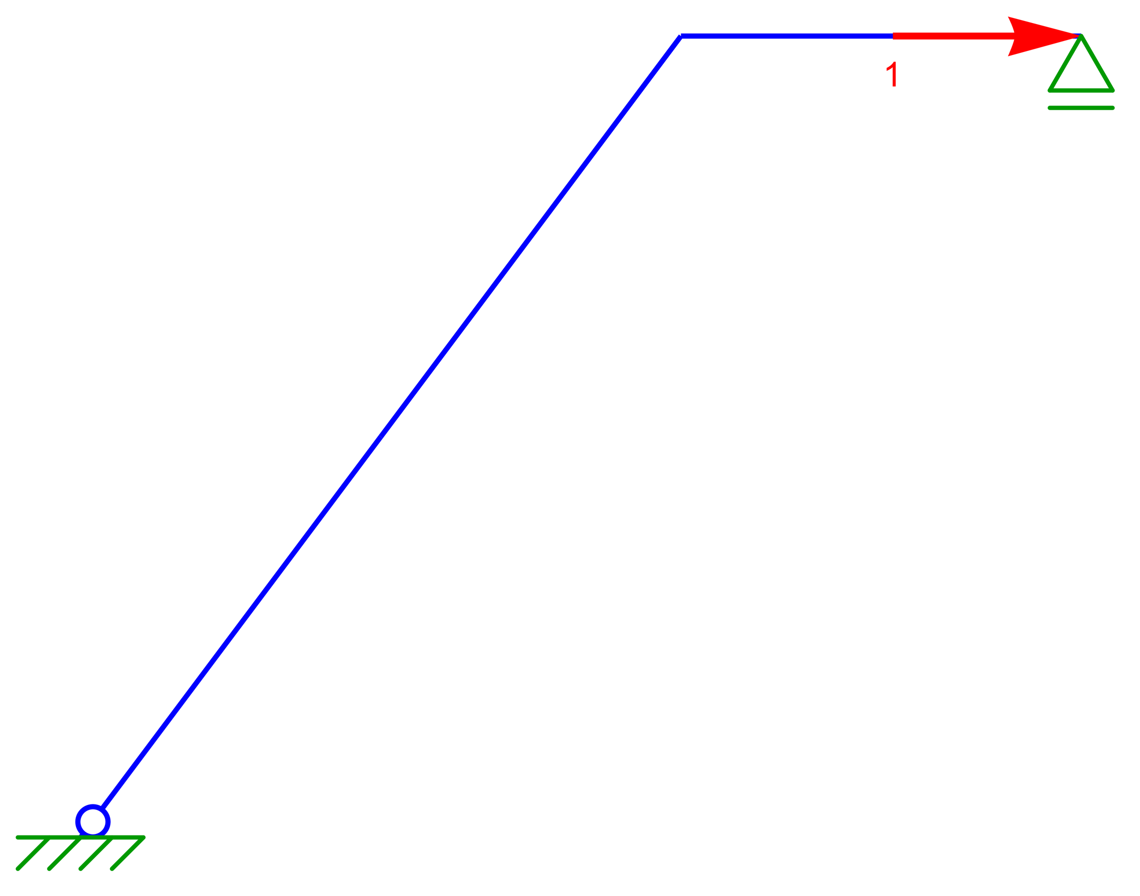
– od q_1:



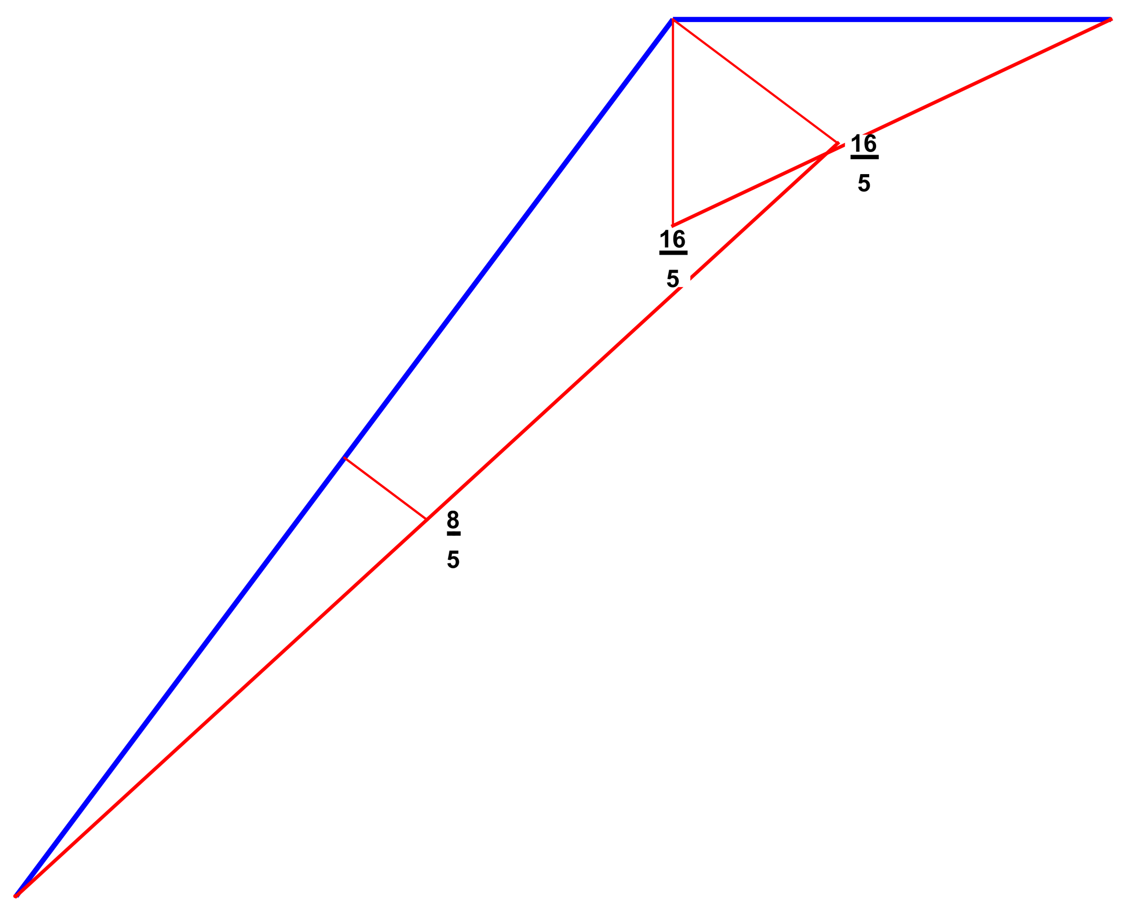
$M_1[l]$:



– od q_2:



$M_2[l]$:



Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{2}l+\frac{1}{3}\cdot 2\,l\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}l+\frac{2}{3}\cdot 2\,l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 4\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2l\right)\right]_3 = \frac{129}{2}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{5}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{2}l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{5}l+\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{5}l\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{5}l+\frac{2}{3}\cdot\frac{16}{5}l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 4\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{16}{5}l\right)\right]_3 = \frac{748}{15}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{5}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{5}l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{8}{5}l+\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{5}l\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{5}l+\frac{2}{3}\cdot\frac{16}{5}l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{5}l\cdot 4\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{16}{5}l\right)\right]_3 = \frac{3584}{75}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} \frac{129}{2} & \frac{748}{15} \\ \frac{748}{15} & \frac{3584}{75} \end{pmatrix}$$

ZADANIE DRGAŃ WŁASNYCH:

– poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$$\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{a}\sin(\omega t)$$

– zadanie własne:

$$(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,)\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

– równanie charakterystyczne $\left(\lambda = \frac{\omega^2\,l^3\,m}{EJ}\right)$:

$$\det(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\frac{129\,\lambda}{2} & -\frac{374\,\lambda}{15} \\ -\frac{748\,\lambda}{15} & 1-\frac{1792\,\lambda}{75} \end{pmatrix}\right) = 1 - \frac{13\,259\,\lambda}{150} + \frac{2680\,\lambda^2}{9} = 0$$

$$\lambda^{(1)} = 0.01178\ ,\quad \lambda^{(2)} = 0.28506$$

Częstości drgań własnych:

$$\omega^{(1)} = 0.109\,\frac{1}{\sqrt{\frac{l^3\,m}{EJ}}}\ ,\quad \omega^{(2)} = 0.534\sqrt{\frac{EJ}{l^3\,m}}$$

Zadanie przygotował Karol Bołbotowski.