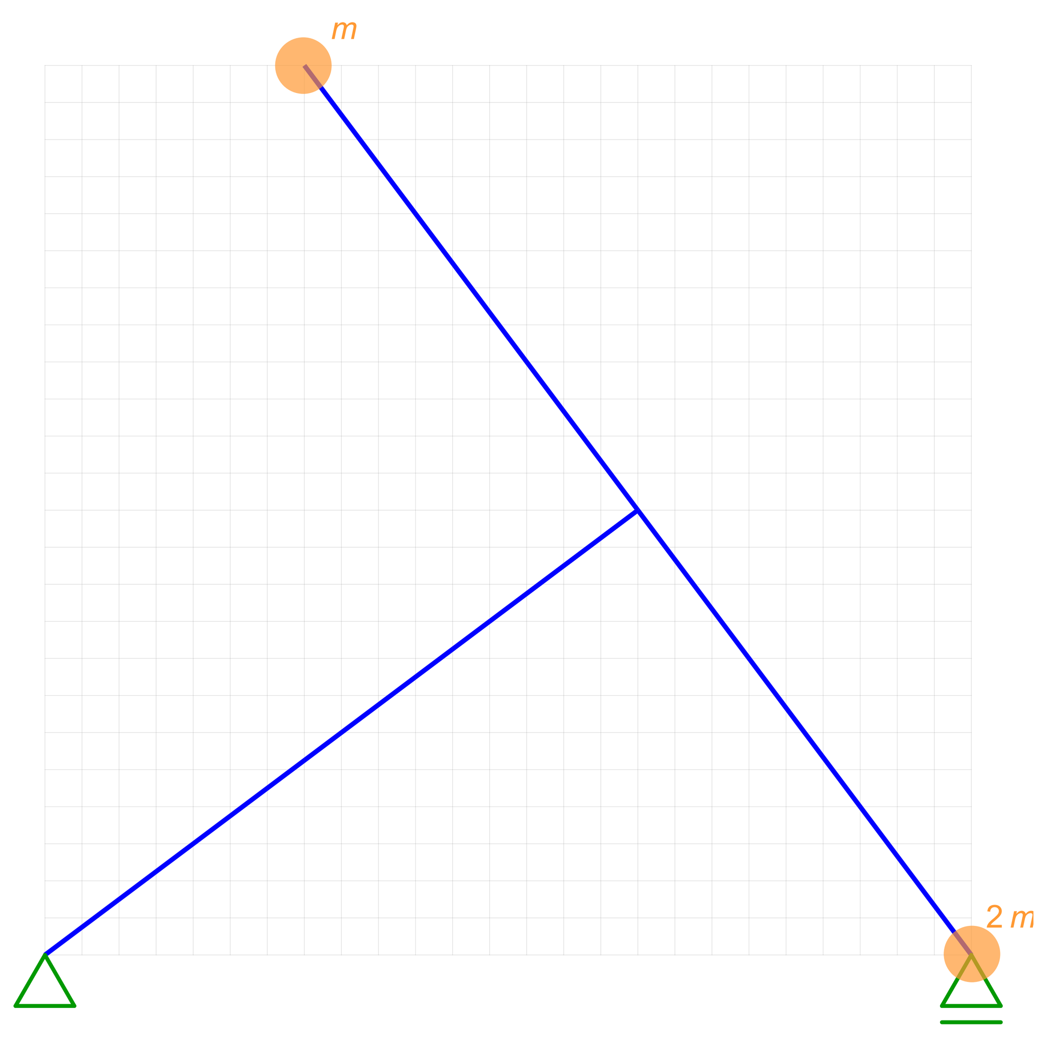
Kol 2.2 R.A. 2021/22

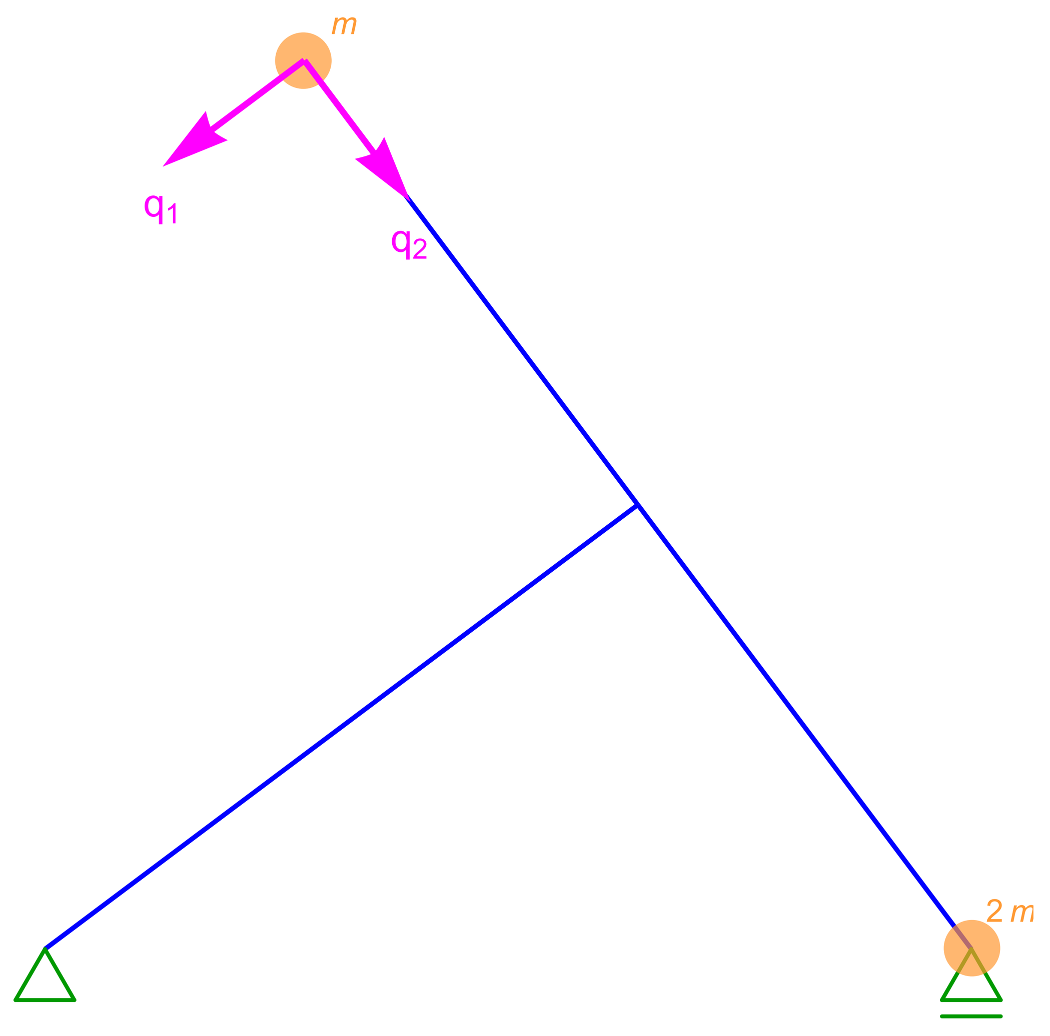
Obliczyć częstości drgań własnych.

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – $\frac{1}{5}l$):

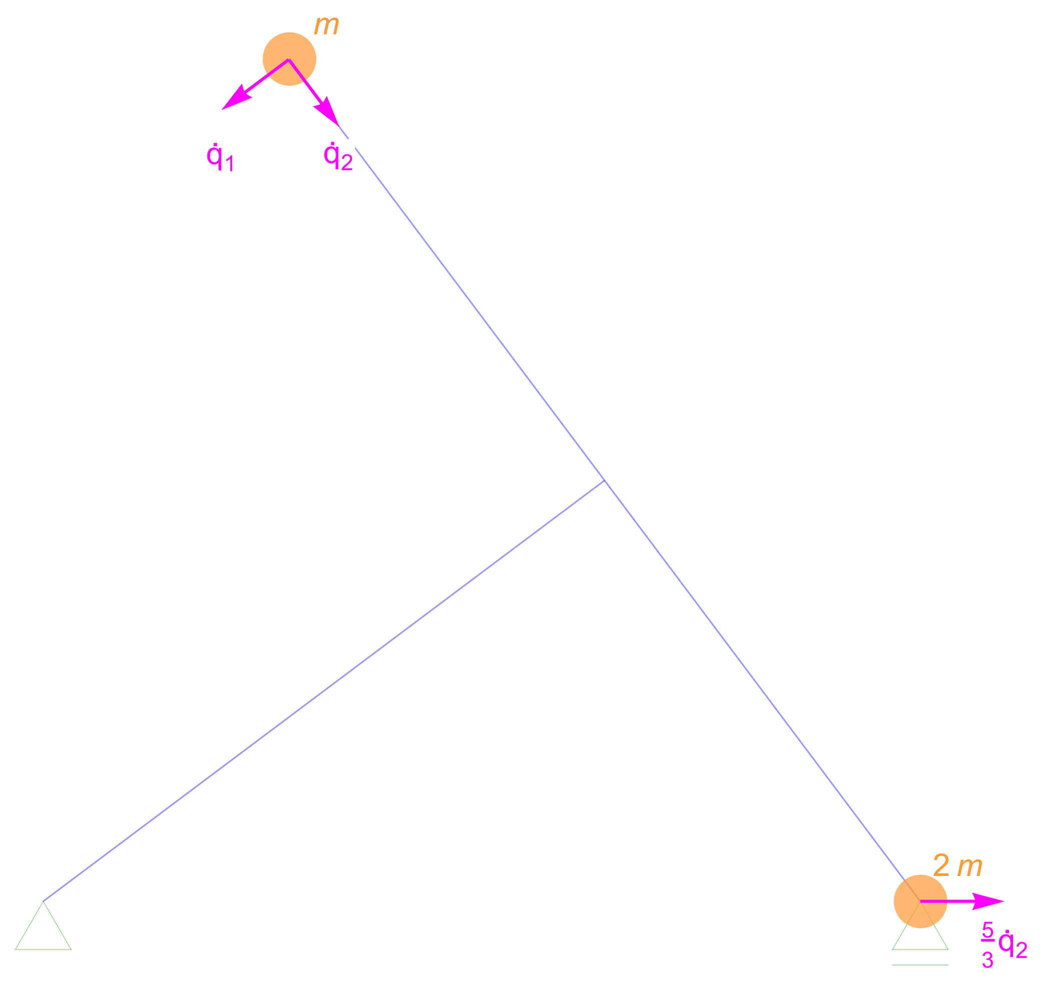


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

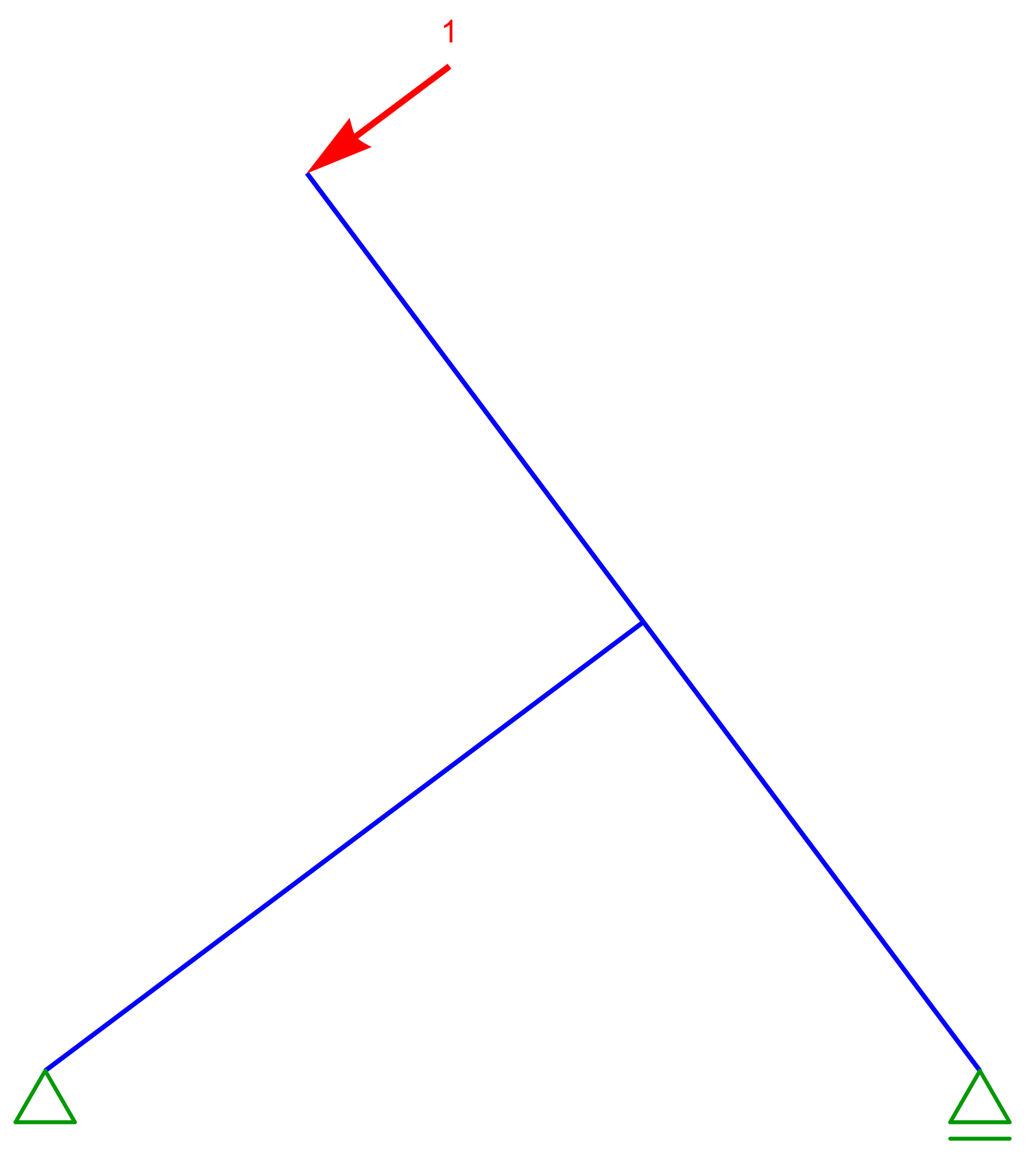
$$2E_k(\dot{\mathbf{q}}) = 2m\left(\frac{5}{3}\dot{q}_2\right)^2 + m\left[\dot{q}_2^{\,2} + \dot{q}_1^{\,2}\right] = m\dot{q}_1^{\,2} + \frac{59}{9}m\dot{q}_2^{\,2} = \dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}$$

Macierz mas:

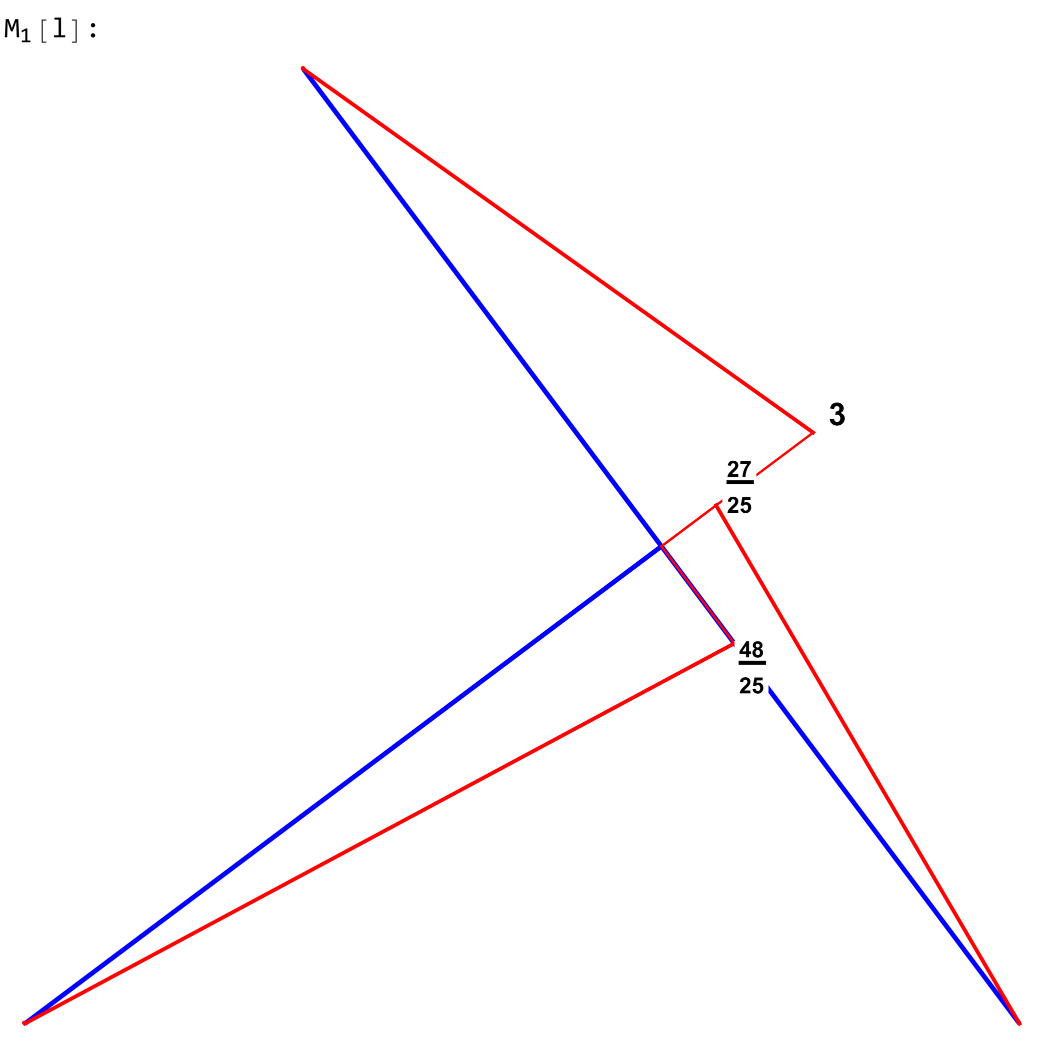
$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{59}{9} \end{pmatrix}$$

Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

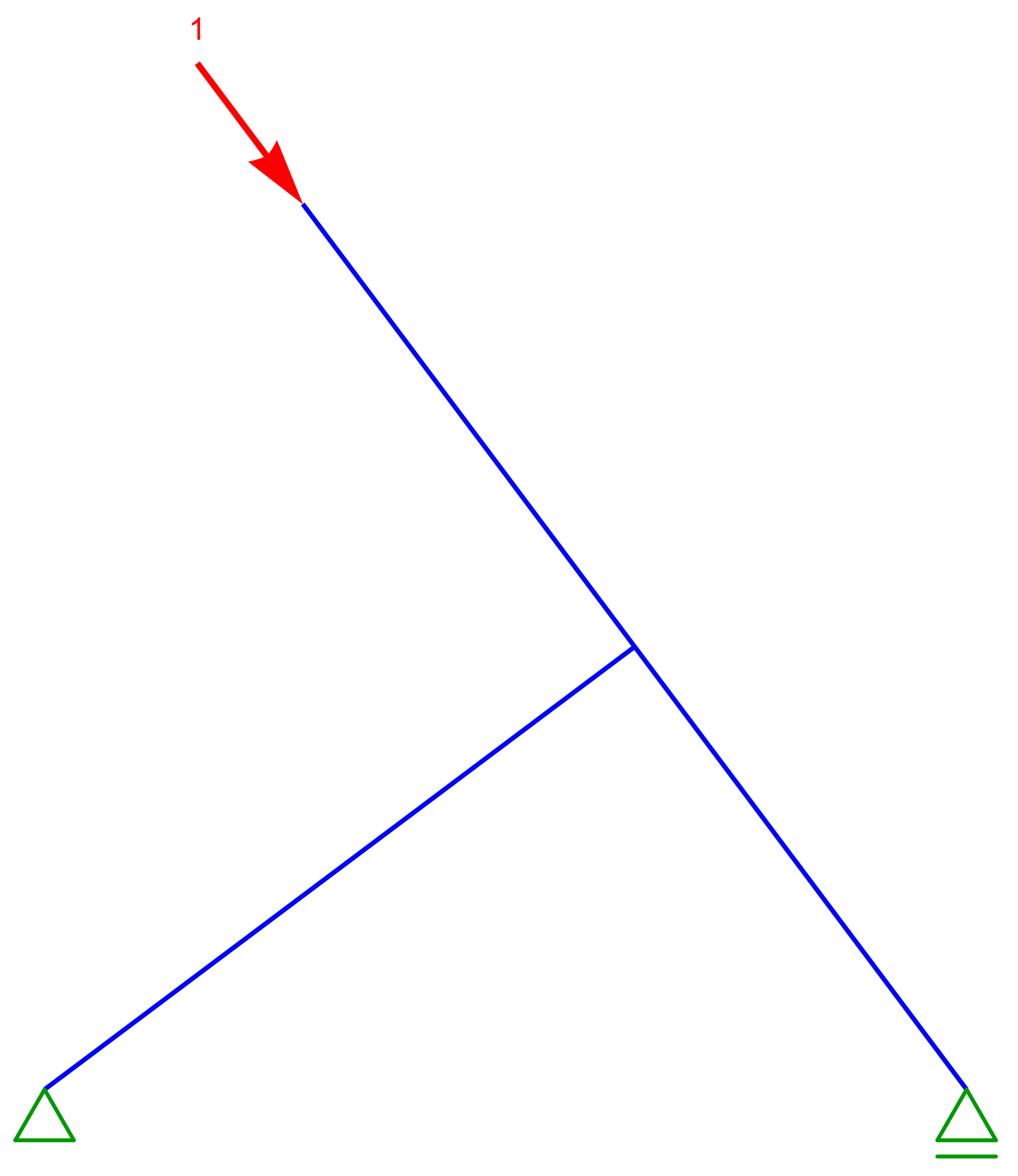
– od q_1:



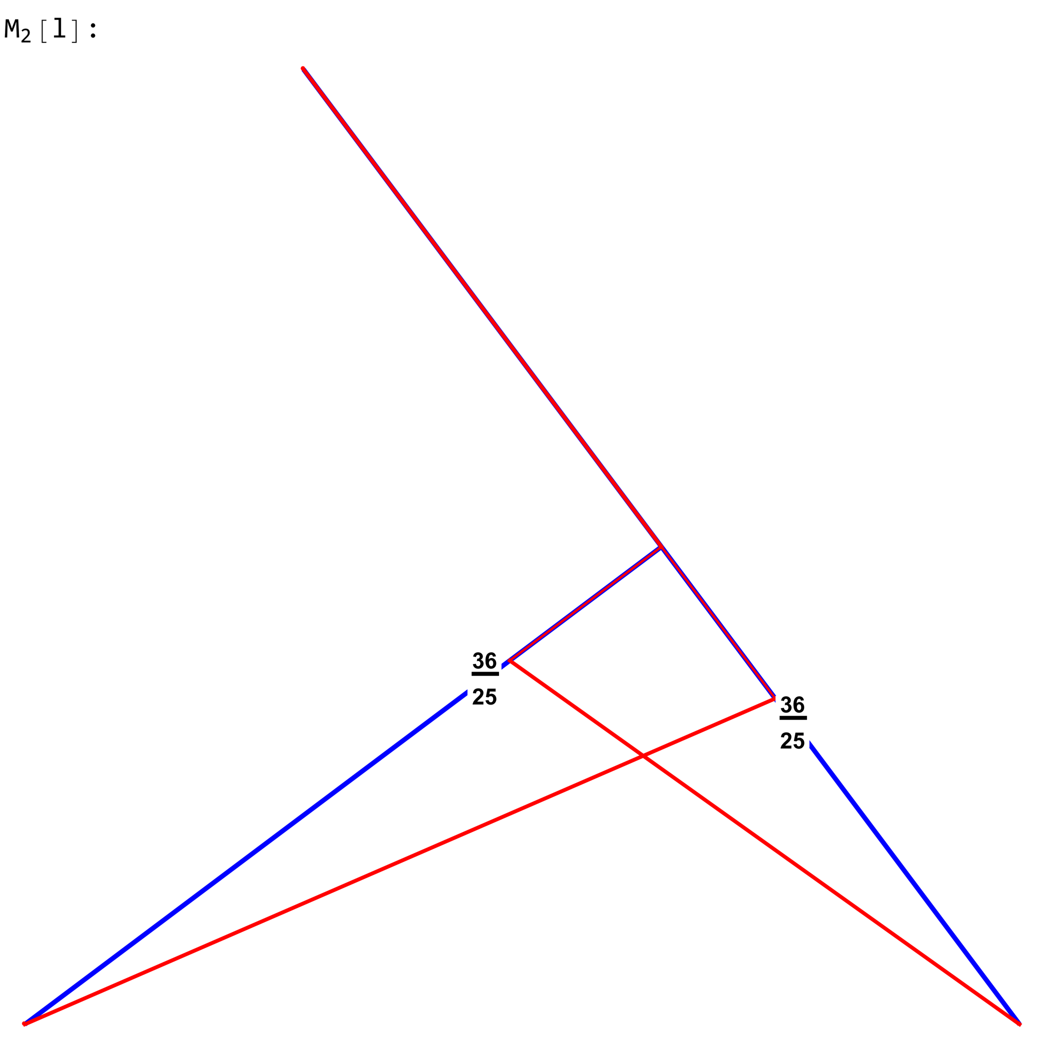
$M_1[l]$:



– od q_2:



$M_2[l]$:



Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{48}{25}l\cdot 4l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{48}{25}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{25}l\cdot 3l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{25}l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot 3l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l\right)\right]_3 = \frac{9426}{625}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{48}{25}l\cdot 4l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{36}{25}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{25}l\cdot 3l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{36}{25}l\right)\right)\right]_2 = \frac{1332}{625}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{36}{25}l\cdot 4l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{36}{25}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{36}{25}l\cdot 3l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{36}{25}l\right)\right]_2 = \frac{3024}{625}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} \frac{9426}{625} & \frac{1332}{625} \\ \frac{1332}{625} & \frac{3024}{625} \end{pmatrix}$$

ZADANIE DRGAŃ WŁASNYCH:

– poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}\sin(\omega t)$$

– zadanie własne:

$$(\mathbf{I} - \omega^2\mathbf{D}\mathbf{M})\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

– równanie charakterystyczne $\left(\lambda = \frac{\omega^2 l^3 m}{EJ}\right)$:

$$\det(\mathbf{I} - \omega^2\mathbf{D}\mathbf{M}) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 - \frac{9426\lambda}{625} & -\frac{8732\lambda}{625} \\ -\frac{1332\lambda}{625} & 1 - \frac{19824\lambda}{625} \end{pmatrix} = 1 - \frac{234\lambda}{5} + \frac{280368\lambda^2}{625} = 0$$

$\lambda^{(1)} = 0.02999$, $\lambda^{(2)} = 0.07434$

Częstości drgań własnych:

$\omega^{(1)} = 0.173\frac{1}{\sqrt{\frac{l^3 m}{EJ}}}$, $\omega^{(2)} = 0.273\sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}}$

Postaci drgań własnych:

$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.765 \\ 1.000 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} -8.571 \\ 1.000 \end{pmatrix}$

Zadanie przygotował Karol Bołbotowski.