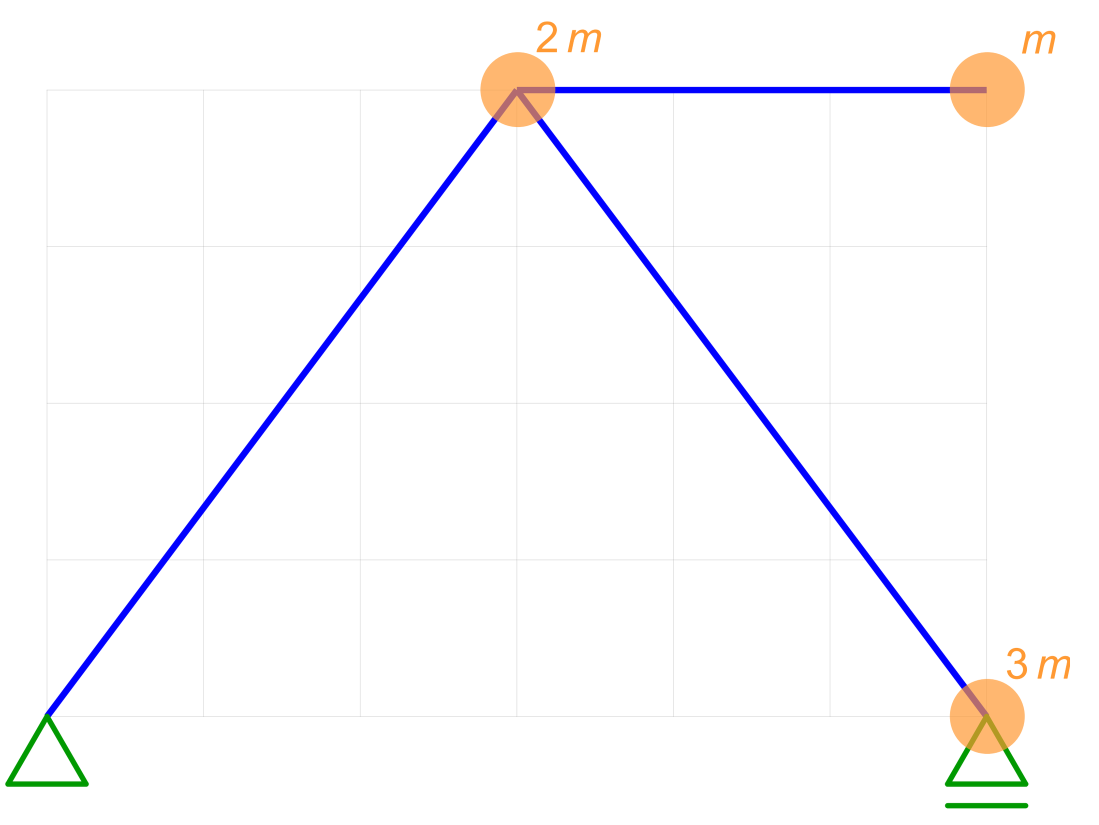
Kol 2.3 R.A. 2020/21

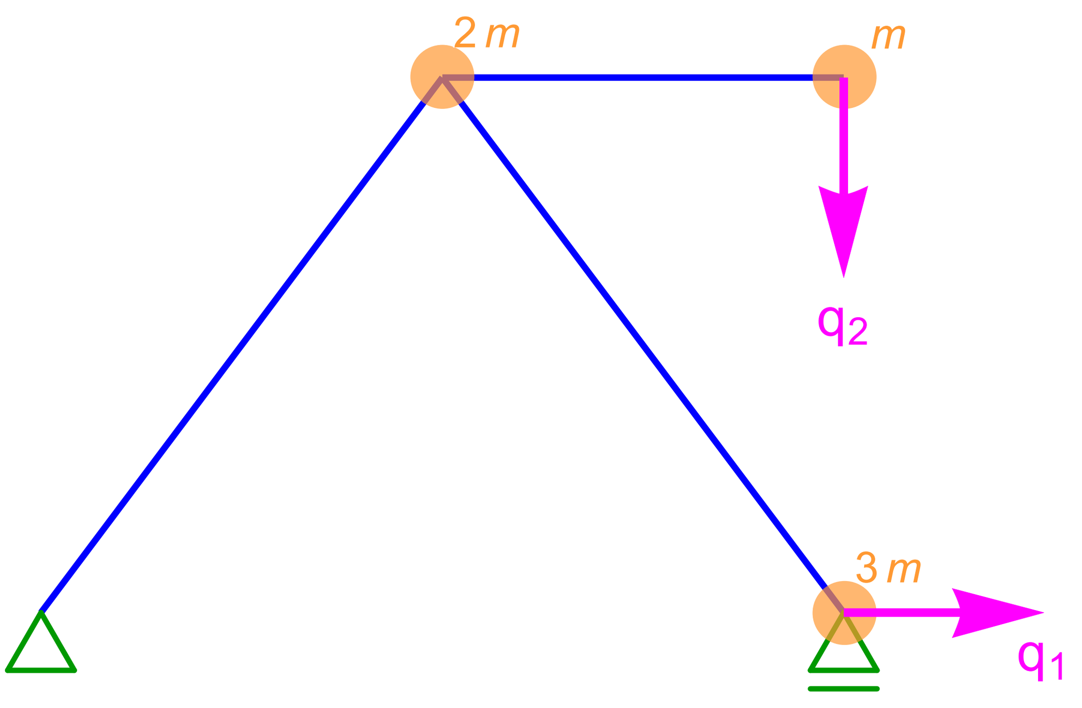
Obliczyć częstości drgań własnych.

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – l):

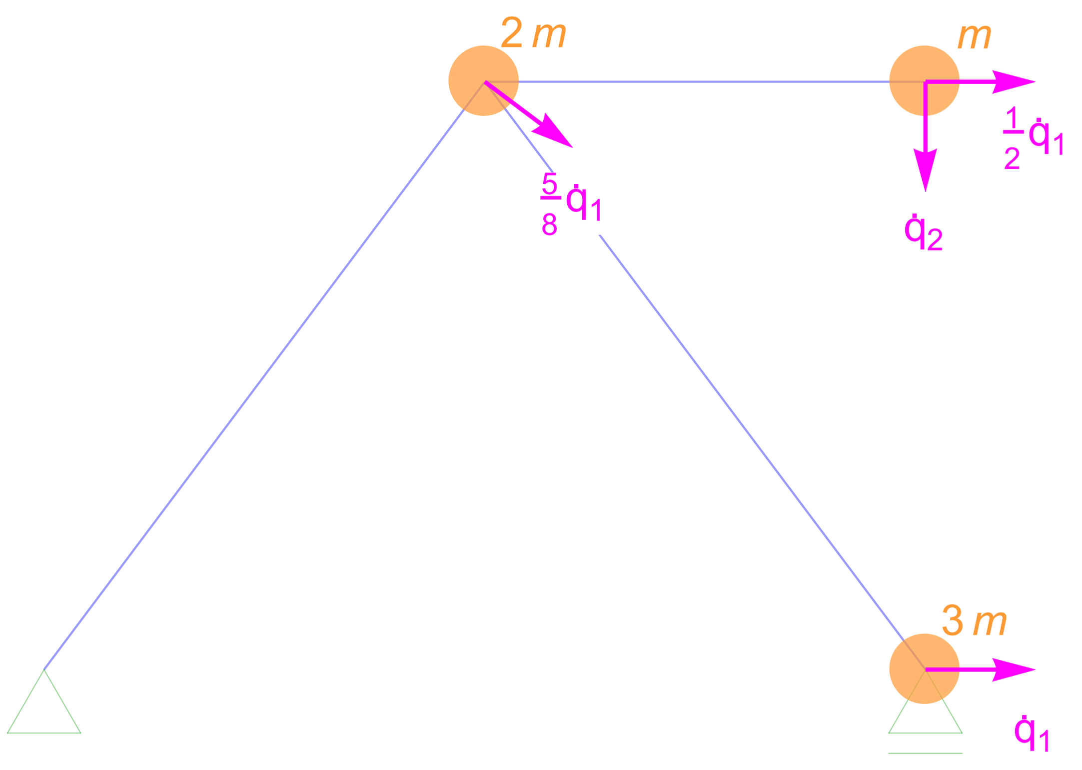


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

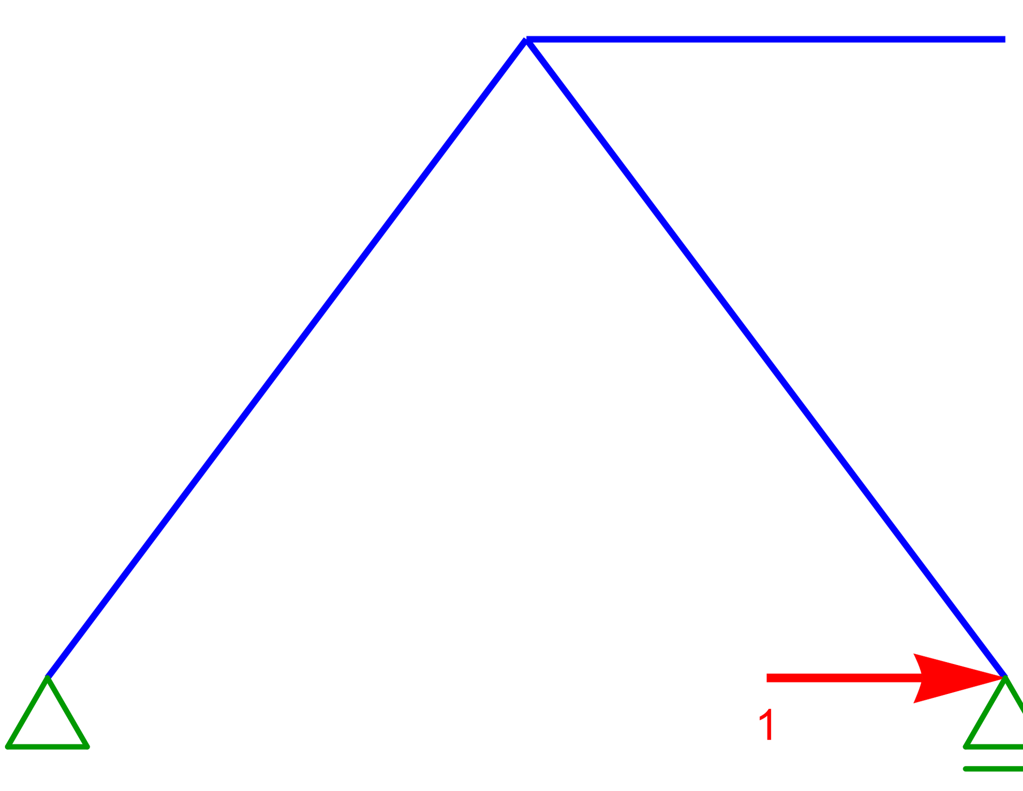
$$2\,E_k\,(\dot{\mathbf{q}}) = 2\,m\,\left(\frac{5}{8}\,\dot{q}_1\right)^2 + 3\,m\,\dot{q}_1^{\,2} + m\,\left[\,\dot{q}_2^{\,2} + \left(\frac{1}{2}\,\dot{q}_1\right)^2\right] = \frac{129}{32}\,m\,\dot{q}_1^{\,2} + m\,\dot{q}_2^{\,2} = \dot{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$$

Macierz mas:

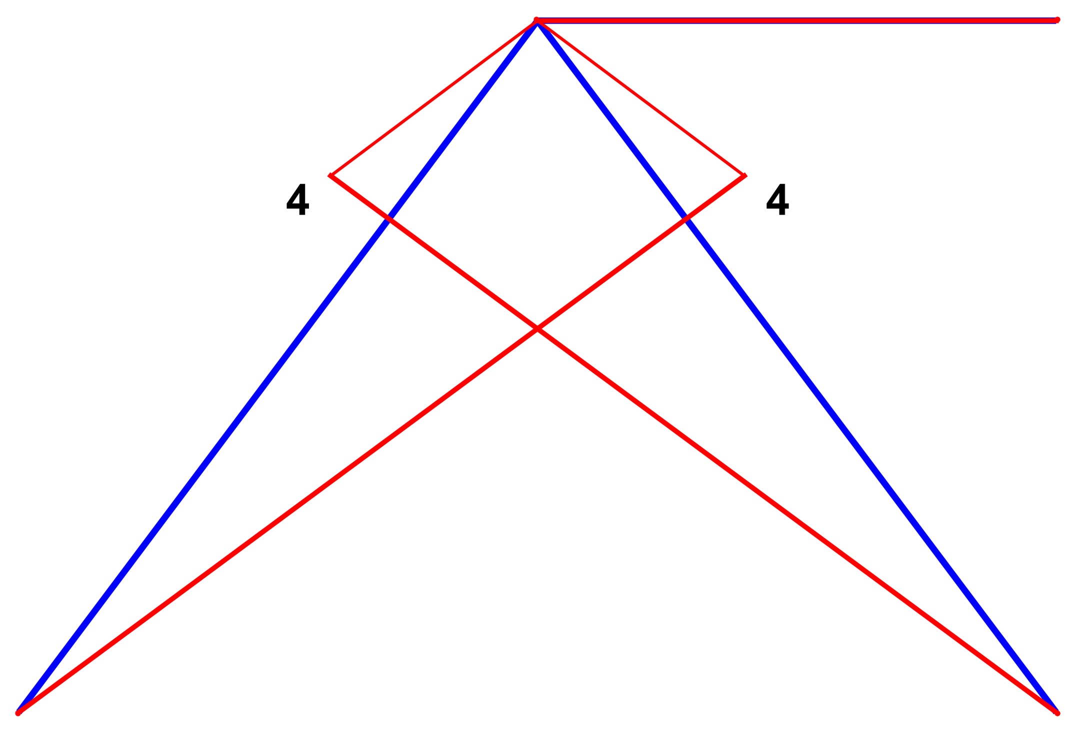
$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} \frac{129}{32} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

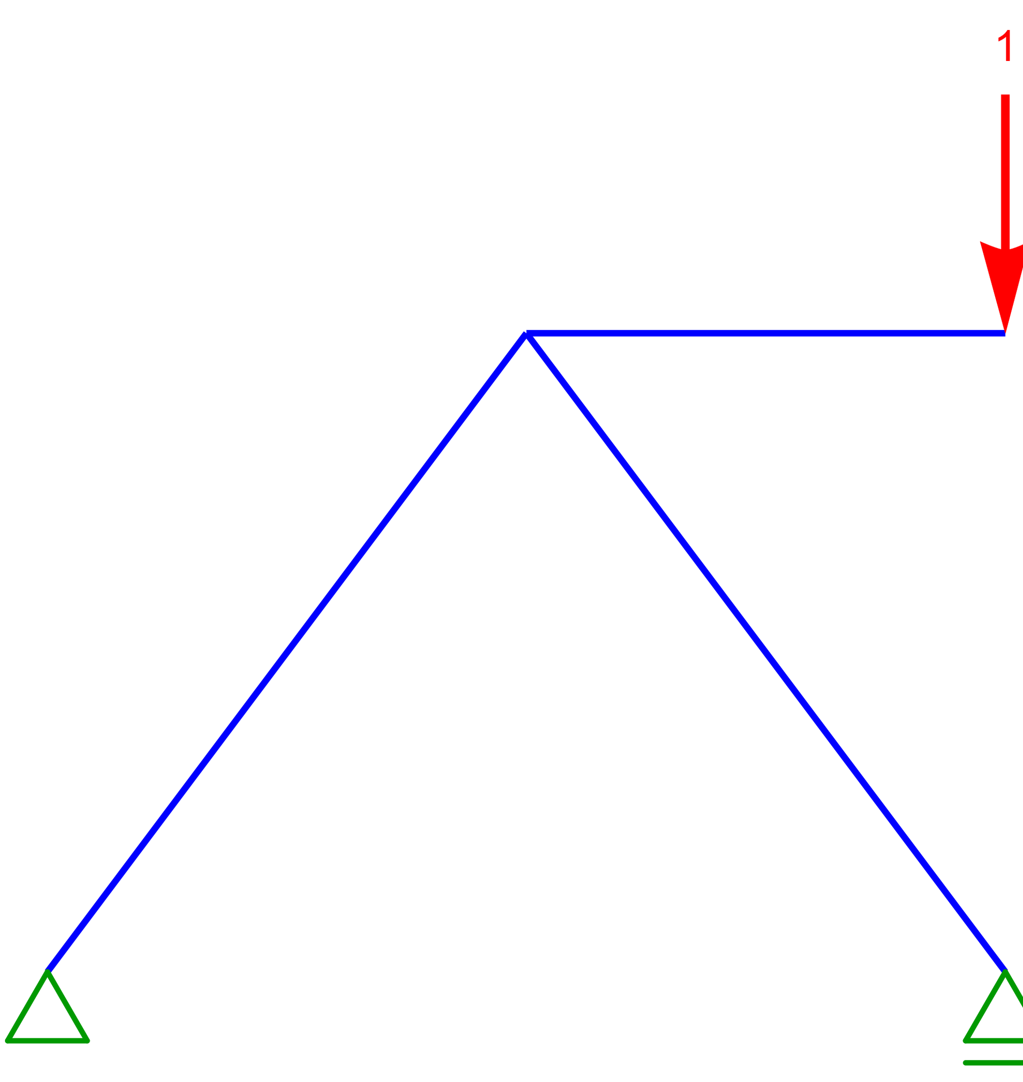
– od q_1:



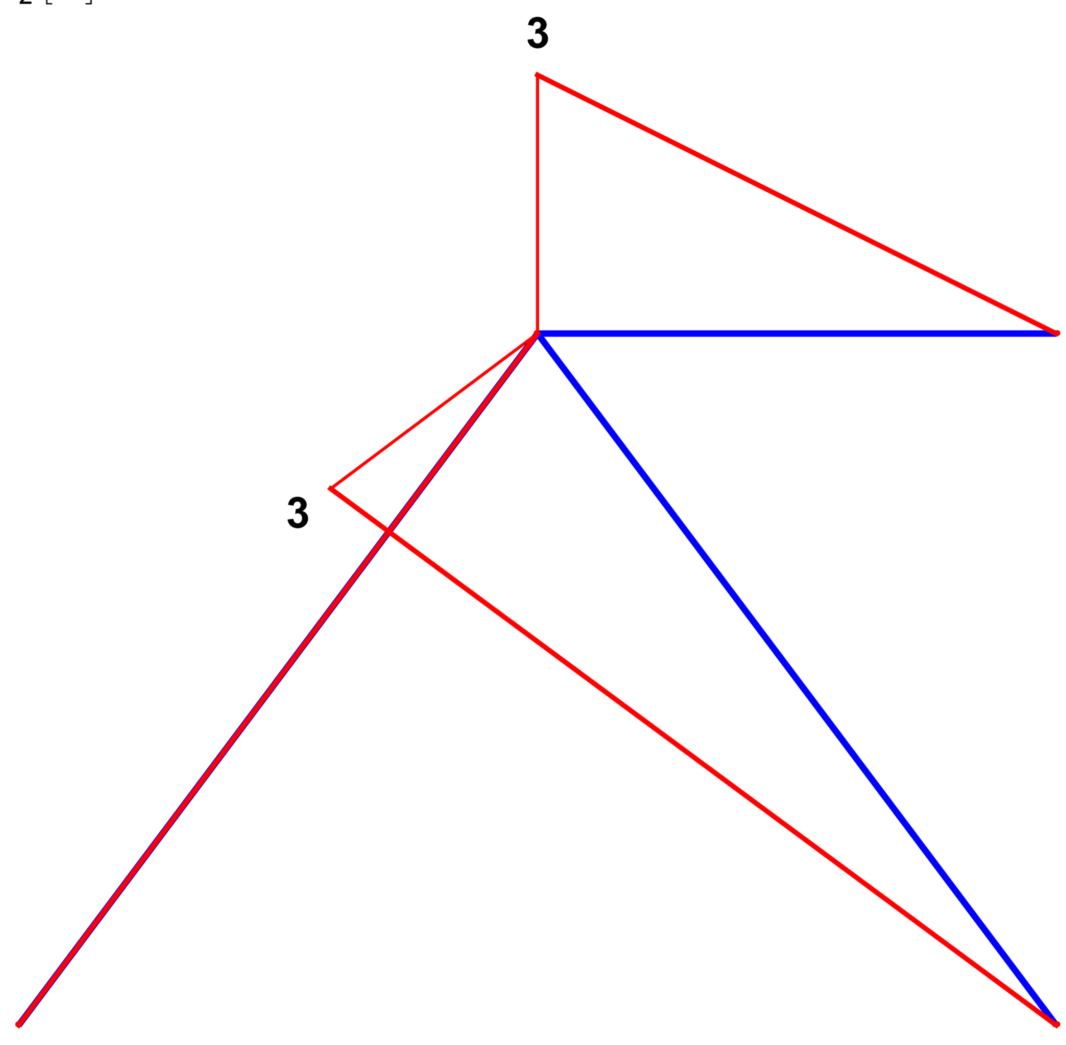
$M_1\,[l]$:



– od q_2:



$M_2\,[l]$:



Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 4l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 4l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 4l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 4l\right)\right]_2 = \frac{160}{3}\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 4l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l\right)\right]_2 = 20\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l\right)\right]_3 = 24\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} \frac{160}{3} & 20 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$$

ZADANIE DRGAŃ WŁASNYCH:

– poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$$\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{a}\,\sin(\omega t)$$

– zadanie własne:

$$(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,)\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

– równanie charakterystyczne $\left(\lambda = \frac{\omega^2\,l^3\,m}{EJ}\right)$:

$$\det(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 - 215\,\lambda & -20\,\lambda \\ -\frac{645\,\lambda}{8} & 1 - 24\,\lambda \end{pmatrix}\right) = 1 - 239\,\lambda + \frac{7095\,\lambda^2}{2} = 0$$

$$\lambda^{(1)} = 0.00448 \quad , \quad \lambda^{(2)} = 0.06289$$

Częstości drgań własnych:

$$\omega^{(1)} = 0.067\,\frac{1}{\sqrt{\frac{l^3\,m}{EJ}}} \quad , \quad \omega^{(2)} = 0.251\,\sqrt{\frac{EJ}{l^3\,m}}$$

Zadanie przygotował Karol Bołbotowski.