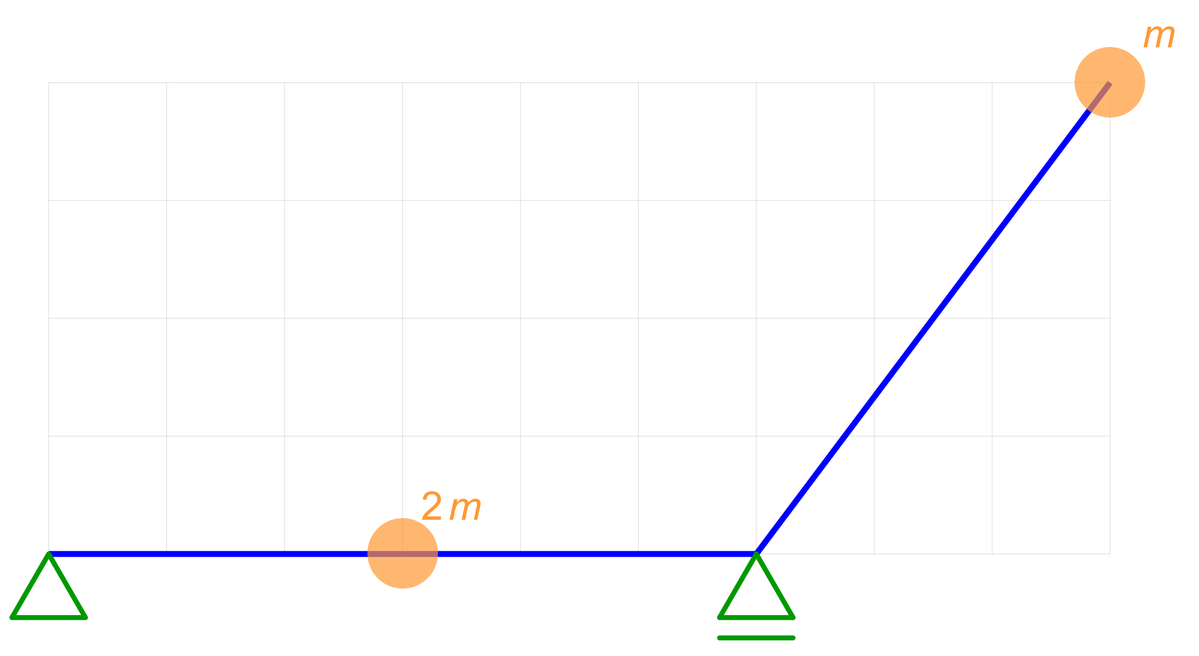
Kol 2.3 R.A. 2018/19

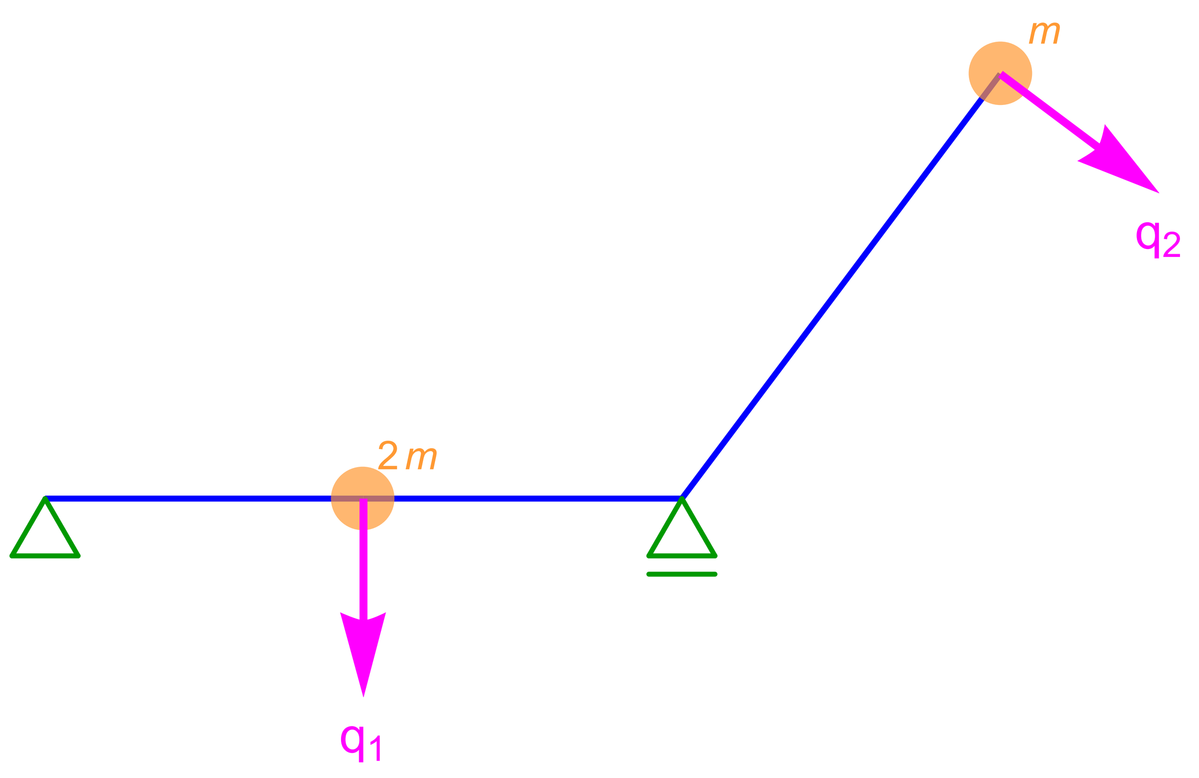
Wyznaczyć częstości oraz postaci drgań własnych.

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – l):

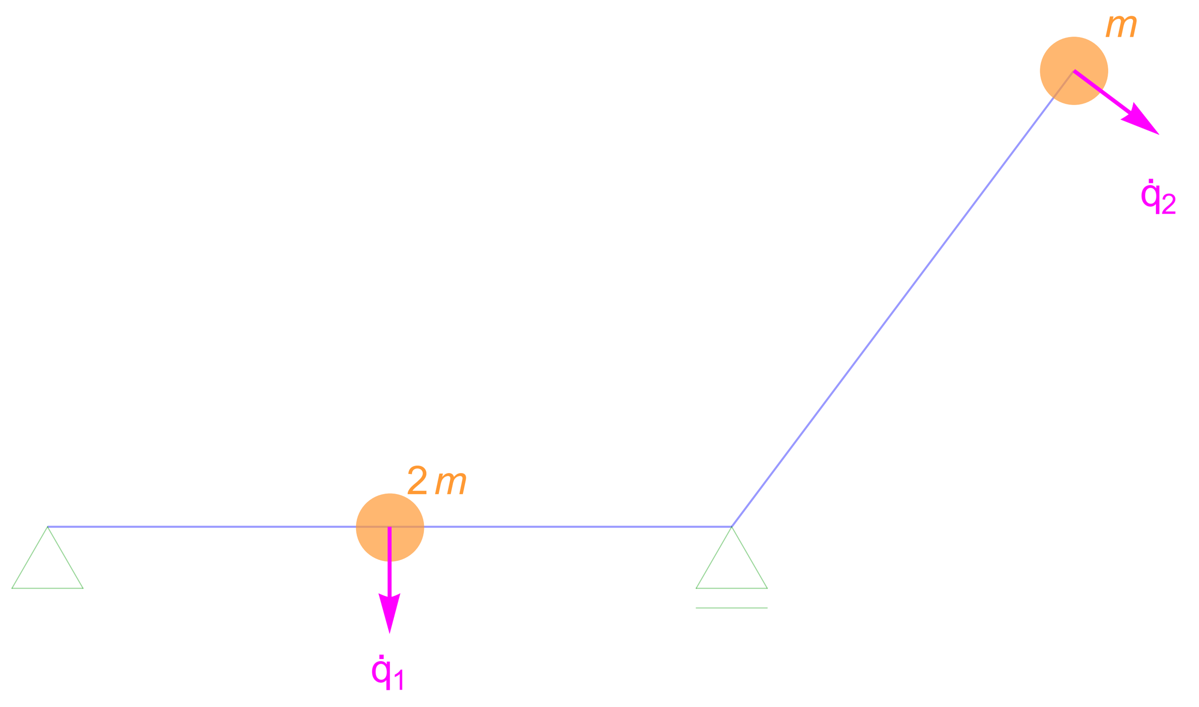


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

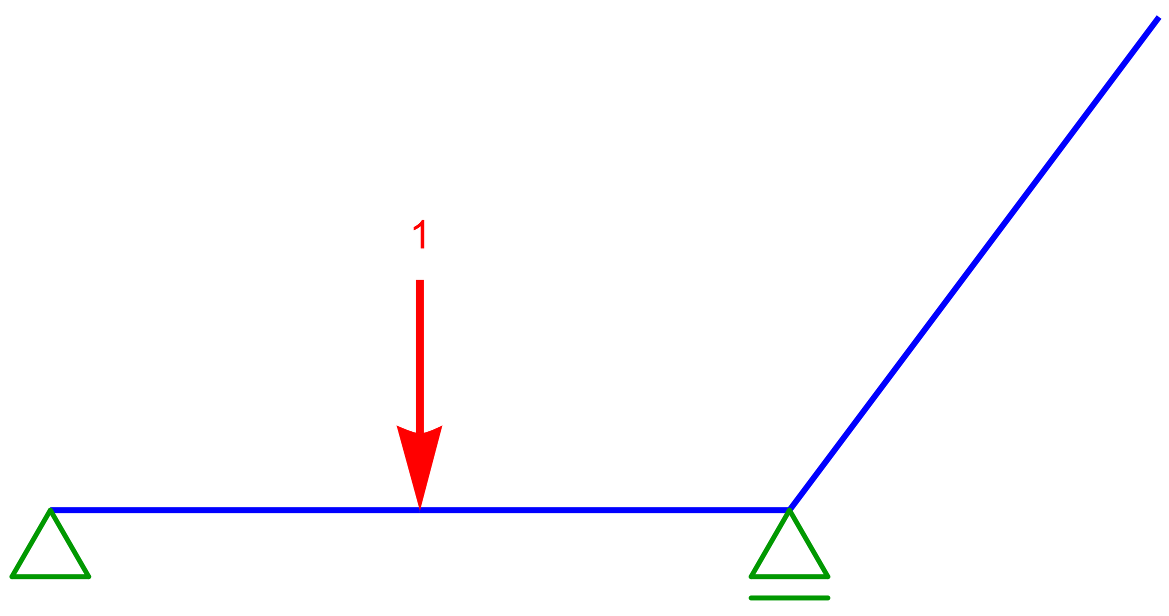
$$2\,E_k\,(\dot{\mathbf{q}}) = 2\,m\,\dot{q}_1^{\,2} + m\,\dot{q}_2^{\,2} = 2\,m\,\dot{q}_1^{\,2} + m\,\dot{q}_2^{\,2} = \dot{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$$

Macierz mas:

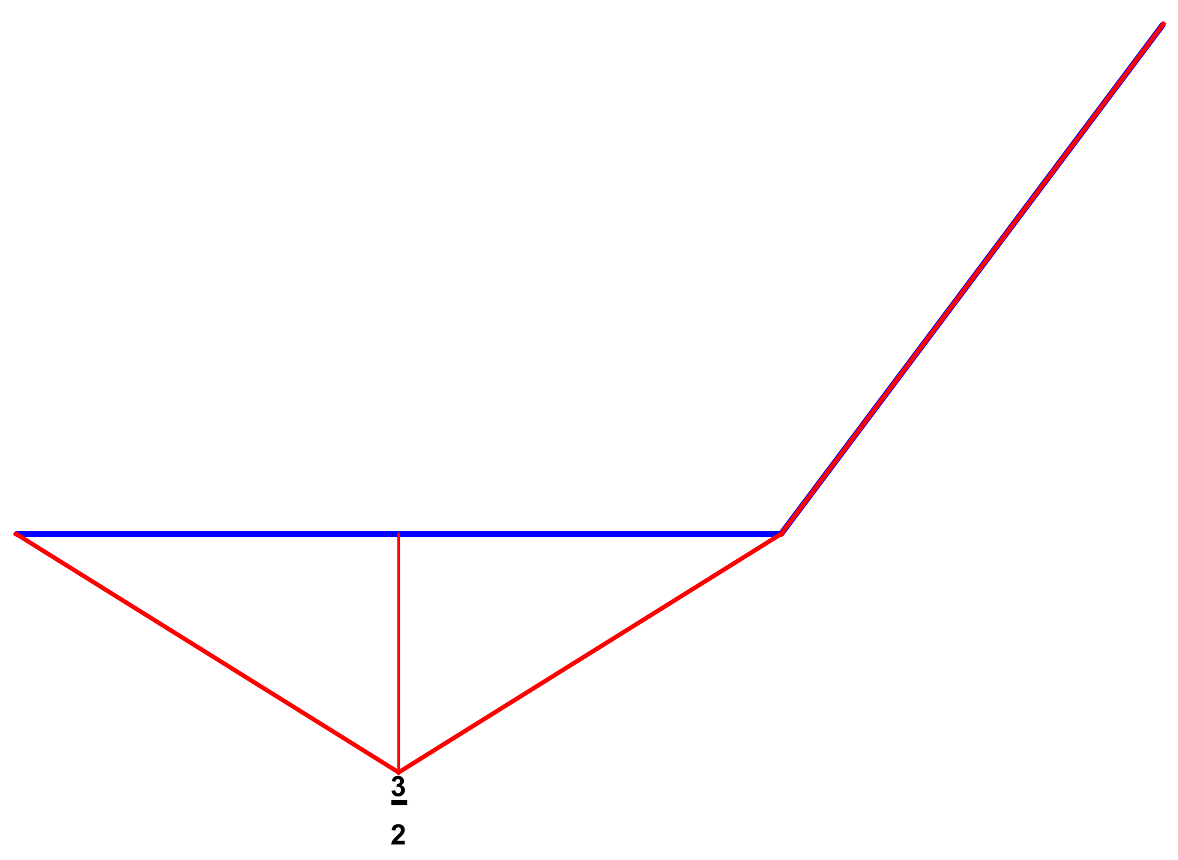
$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

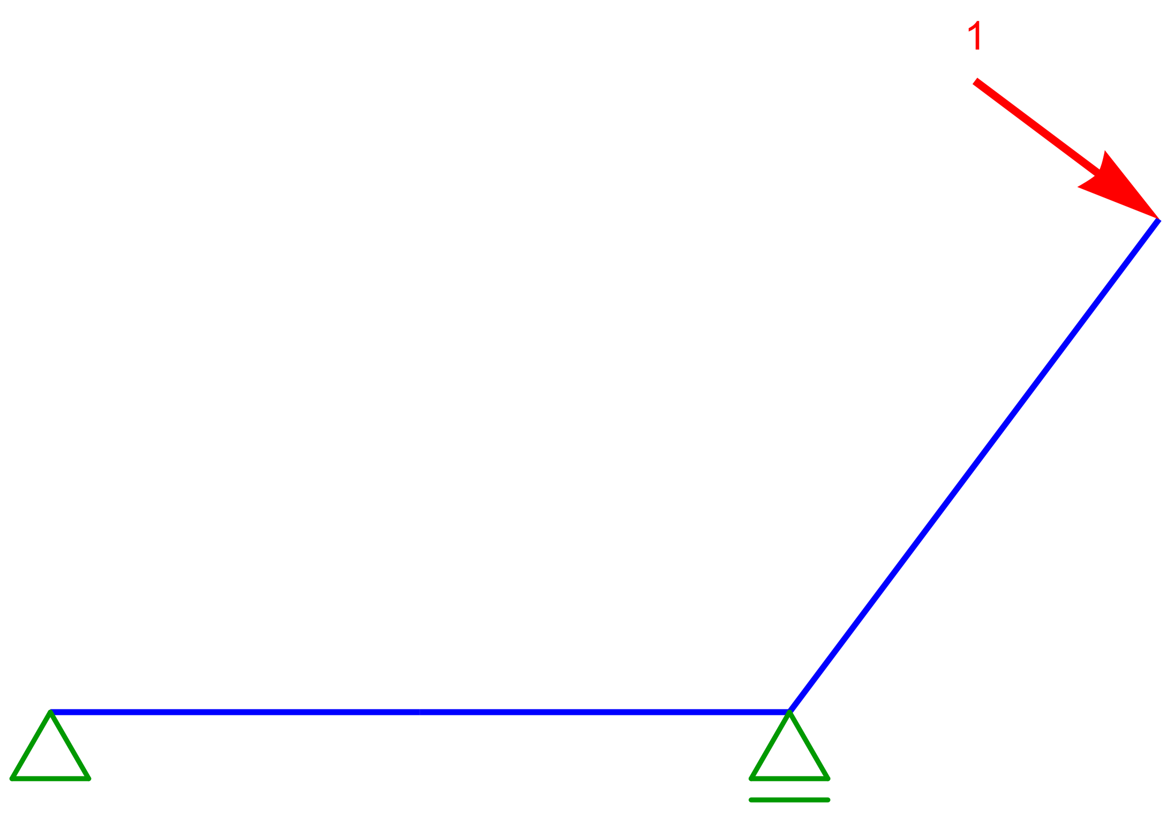
– od q_1:



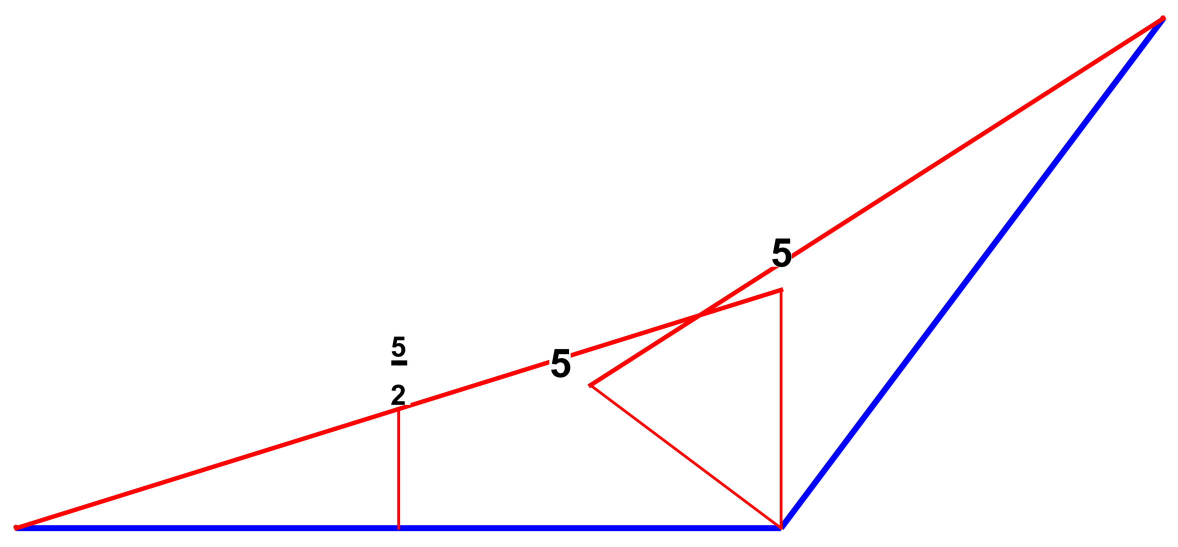
$M_1[l]$:



– od q_2:



$M_2[l]$:



Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}l\right)\right]_2 = \frac{9}{2}\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}l\right)\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{5}{2}l\right)+\frac{1}{3}\cdot(-5l)\right)\right]_2 = -\frac{45}{4}\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}l+\frac{1}{3}\cdot 5l\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot 5l\cdot 3\,l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}l+\frac{2}{3}\cdot 5l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 5l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 5l\right)\right]_3 = \frac{275}{3}\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{45}{4} \\ -\frac{45}{4} & \frac{275}{3} \end{pmatrix}$$

ZADANIE DRGAŃ WŁASNYCH:

– poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$$\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{a}\,\sin(\omega t)$$

– zadanie własne:

$$(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,)\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

– równanie charakterystyczne $\left(\lambda = \frac{\omega^2\,l^3\,m}{EJ}\right)$:

$$\det(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-9\,\lambda & \frac{45\,\lambda}{4} \\ \frac{45\,\lambda}{2} & 1-\frac{275\,\lambda}{3} \end{pmatrix}\right) = 1 - \frac{302\,\lambda}{3} + \frac{4575\,\lambda^2}{8} = 0$$

$\lambda^{(1)} = 0.01057$, $\lambda^{(2)} = 0.16546$

Częstości drgań własnych:

$$\omega^{(1)} = 0.103\,\frac{1}{\sqrt{\frac{l^3\,m}{EJ}}} \quad , \quad \omega^{(2)} = 0.407\,\sqrt{\frac{EJ}{l^3\,m}}$$

Postaci drgań własnych:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.131 \\ 1.000 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3.805 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Zadanie przygotował Karol Bołbotowski.