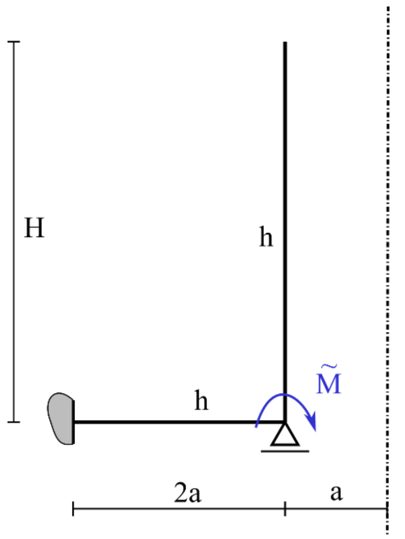
EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. dnia 29 VI 2024

<table>
<tr><td colspan="3">NAZWISKO Imię</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nr albumu</td><td>Oceny z ćwiczeń :</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena
zadania 1</td><td rowspan="2">ocena
zadania 2</td><td>Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td>Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

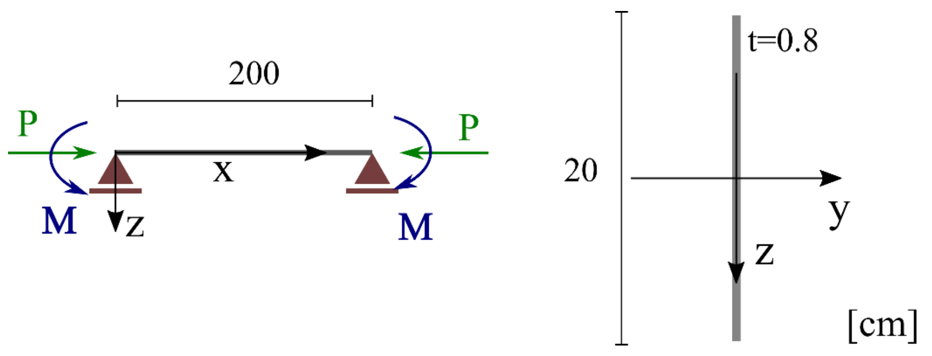
Zadanie 1.

Dany jest zbiornik obciążony jak na rysunku. Omówić możliwie dokładnie kolejne kroki analizy statycznej. Dane są: moduł Younga E = 25 GPa, współczynnik Poissona ν = 0.2, grubość ścianek h = a/20. Założyć H >> a. Jednostka obciążenia $\widetilde{M}$ wynosi [kNm/m].



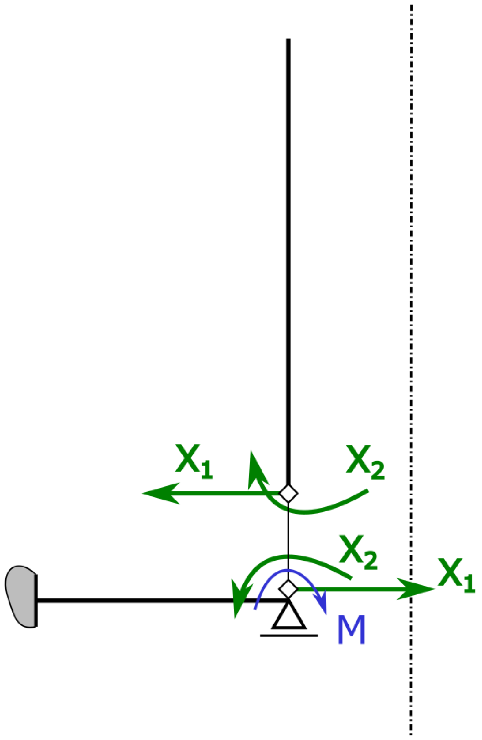
Zadanie 2.

Dany jest płaskownik o długości L = 200 cm podparty widełkowo na obu końcach. Zakładając, że na obu końcach przyłożony jest moment zginający i siła ściskająca, por. rysunek, należy wyznaczyć obszar bezpieczny stateczności. Przyjąć następujące stałe materiałowe: E = 21000 kN/cm^2, ν = 0.3.



Zadanie 2

Schemat zastępczy



Równania nierozdzielności

$\delta_{11}\ X_1\ +\ \delta_{12}\ X_2\ +\ \delta_{10}\ =\ 0$

$\delta_{21}\ X_1\ +\ \delta_{22}\ X_2\ +\ \delta_{20}\ =\ 0$, gdzie:

$\delta_{11}\ =\ \delta_{11\,w}\ +\ \delta_{11\,p}$

$\delta_{12}\ =\ \delta_{12\,w}$

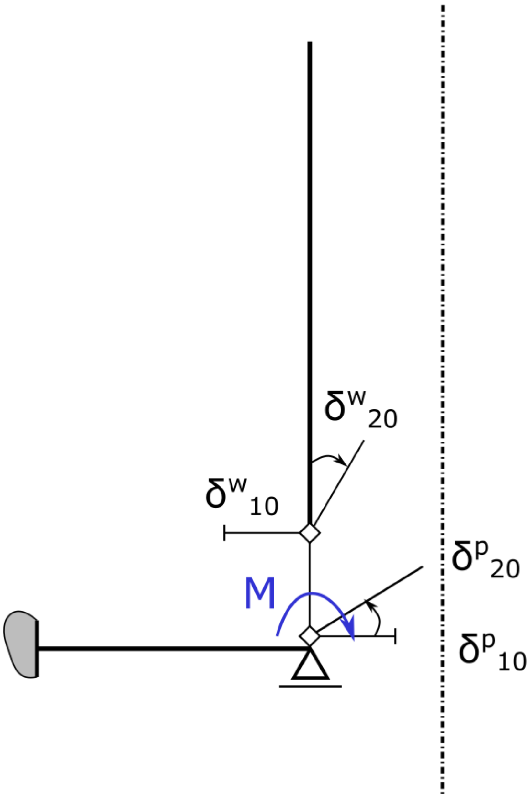
$\delta_{22}\ =\ \delta_{22\,w}\ +\ \delta_{22\,p}$

$\delta_{10}\ =\ 0$

$\delta_{20}\ =\ \delta_{20\,p}$

'p' - oznacza przemieszczenia płyty, a 'w'walca.

Stan “0”



- **Płyta - stan zgięciowy**

Całka ogólna równania różniczkowego ugięcia płyty (R- zewnętrzny promień płyty pierścieniowej) i zależności między ugięciem, a: kątem obrotu przekrojów, siłami wewnętrznymi.

$$w = C_4 + C_2\,\rho^2 + C_3\,\mathrm{Log}[\rho] + C_1\,\rho^2\,\mathrm{Log}[\rho]$$

$$\varphi = \frac{1}{R}\frac{dw}{d\rho} = \frac{\frac{C_3}{\rho} + C_1\,\rho + 2\,C_2\,\rho + 2\,C_1\,\rho\,\mathrm{Log}[\rho]}{R}$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2}\left(-\frac{d^2 w}{d^2\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho}\right) =$$

$$-\frac{D\left(C_3\,(-1+\nu) + (2\,C_2\,(1+\nu) + C_1\,(3+\nu))\,\rho^2 + 2\,C_1\,(1+\nu)\,\rho^2\,\mathrm{Log}[\rho]\right)}{R^2\,\rho^2}$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dw}{d\rho}\right)\right) = -\frac{4\,D\,C_1}{R^3\,\rho}$$

Warunki brzegowe

$$w(1) = 0$$
$$\varphi(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = -\,Mp$$

Uwzględniamy dane

$$D = \frac{E\left(\frac{a}{20}\right)^3}{12\left(1-0.2^2\right)}$$

$D \to 0.0000108507\,E\,a^3$

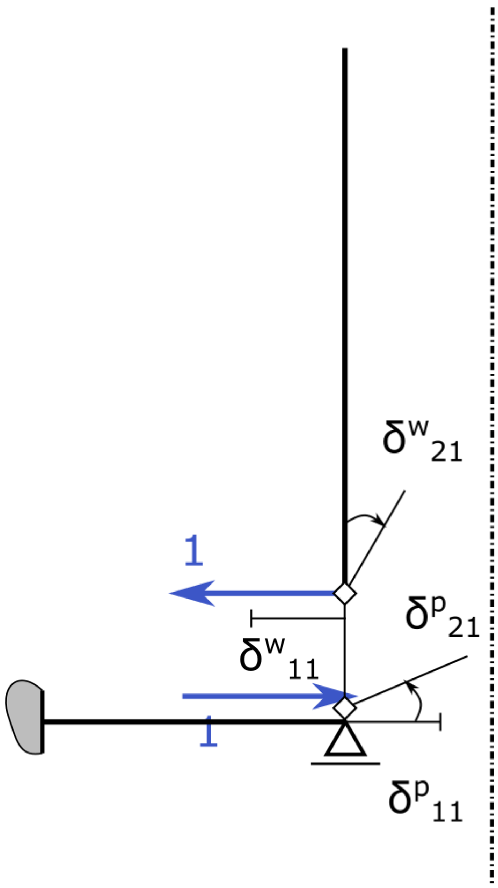
$\nu \to 0.2$

$h \to \frac{a}{20}$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{20\,p} = \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{33\,674.8\,Mp}{E\,a^2}$$

Stan $X_1 = 1$



- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$\xi = \frac{y}{a}$$
$$N_1 = 2\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda\,\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi]$$
$$Q_2 = -e^{-\lambda\xi}\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])$$
$$M_2 = \frac{a\,e^{-\lambda\xi}\,\mathrm{Sin}[\lambda\,\xi]}{\lambda}$$
$$M_1 = \nu\;M_2 = \frac{a\,e^{-\lambda\xi}\,\nu\,\mathrm{Sin}[\lambda\,\xi]}{\lambda}$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\chi = -\frac{2\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])}{E\,h}$$
$$\delta = \frac{2\,a\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda\,\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi]}{E\,h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{11\,w} = \frac{2\,a\,\lambda}{E\,h}$$
$$\delta_{21\,w} = \frac{2\,\lambda^2}{E\,h}$$

- **Płyta**

Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = \frac{B}{r} + A\,r$$
$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$$
$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$
$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\;\epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} - \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$
$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\;\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} + \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

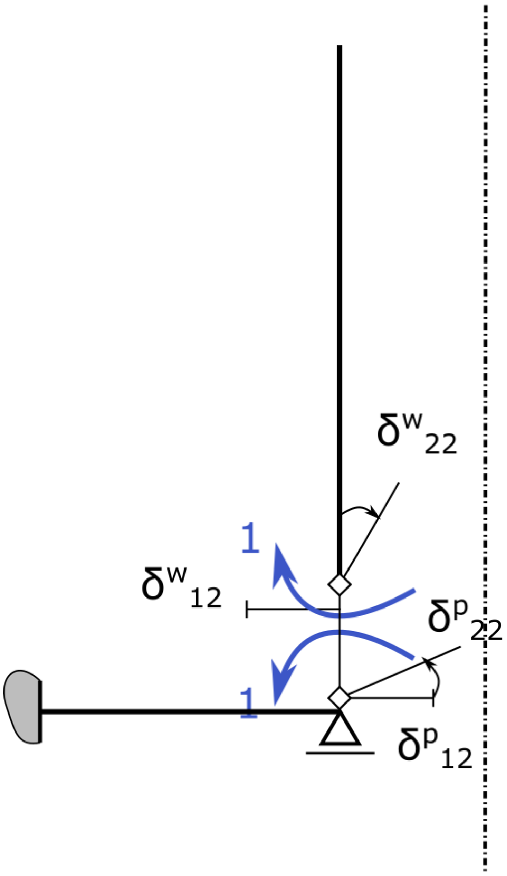
Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{1}{h_2},\; u(3\,a) = 0$$
$$A = \frac{2.28571}{E\,a}$$
$$B = -\frac{20.5714\,a}{E}$$

Ostatecznie.

$$u = -\frac{20.5714\,a}{E\,r} + \frac{2.28571\,r}{E\,a}$$
$$\delta_{11\,p} = -\;u(a) = \frac{18.2857}{EE}$$

Stan $X_2 = 1$



- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$N_1 = -\frac{2\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\xi])}{a}$$

$$Q_2 = -\frac{2\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda\,\mathrm{Sin}[\lambda\xi]}{a}$$

$$M_2 = -e^{-\lambda\xi}\,(\mathrm{Cos}[\lambda\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\xi])$$

$$M_1 = \nu\,M_2 = e^{-\lambda\xi}\,\nu\,(\mathrm{Cos}[\lambda\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\xi])$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\delta = -\frac{2\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\xi])}{E\,h}$$

$$\chi = \frac{4\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda^3\,\mathrm{Cos}[\lambda\xi]}{E\,a\,h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{12\,w} = \frac{2\,\lambda^2}{E\,h}$$

$$\delta_{22\,w} = \frac{4\,\lambda^3}{E\,a\,h}$$

- **Płyta**

Warunki brzegowe

$$w(1) = 0$$
$$\varphi(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22\,p} = \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{33\,674.8}{E\,a^2}$$

Rozwiązanie układu równań

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy najstępujące siły wewnętrzne.

$$X_1 = -\frac{841.869\,Mp\,\lambda^2}{a\left(384.855 + 841.869\,\lambda + 0.914286\,\lambda^3 + 1.\,\lambda^4\right)}$$

$$X_2 = \frac{Mp\,(384.855 + 841.869\,\lambda)}{384.855 + 841.869\,\lambda + 0.914286\,\lambda^3 + 1.\,\lambda^4}$$

Dalej przyjęto następujące dane liczbowe.

$$E \to 25\,000\,000\,000$$
$$\nu \to 0.2$$

Z przyjętych danych wynikają następujące wartości sztywności płytowej (płyty dennej) i współczynnika λ.

$$D = \frac{E\,h^3}{12\left(1 - \nu^2\right)} = 271\,267.\,a^3$$

$$\lambda = \left(\frac{3\left(1 - \nu^2\right)a^2}{h^2}\right)^{0.25} = 5.8259$$

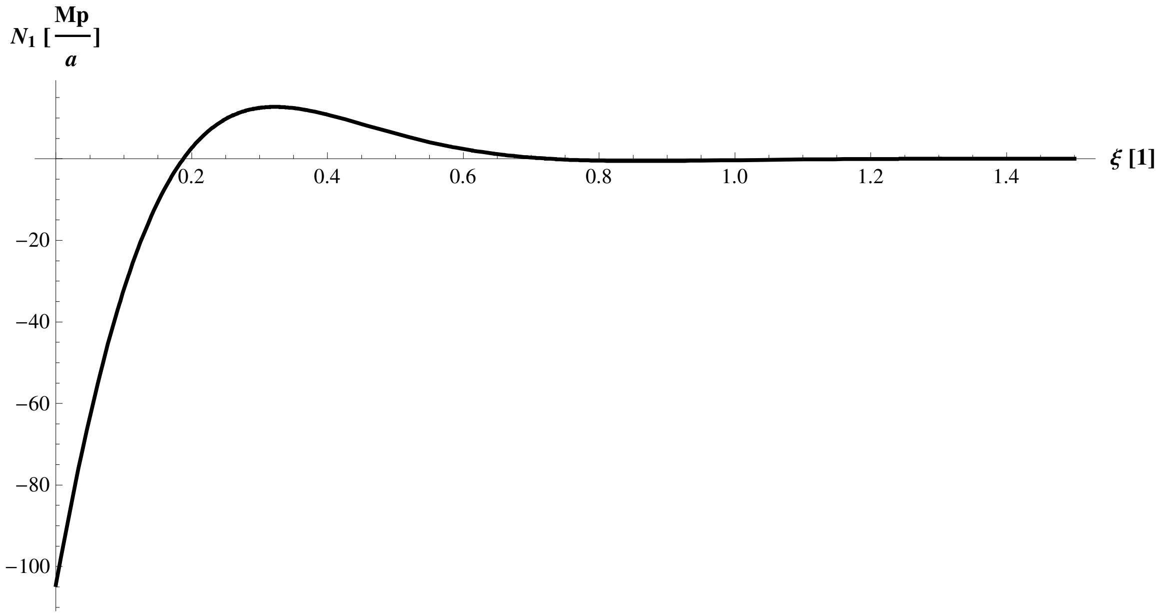
Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości.

$$X_1 = -\frac{4.31482\,Mp}{a}$$
$$X_2 = 0.798742\,Mp$$

Wykresy sił wewnętrznych

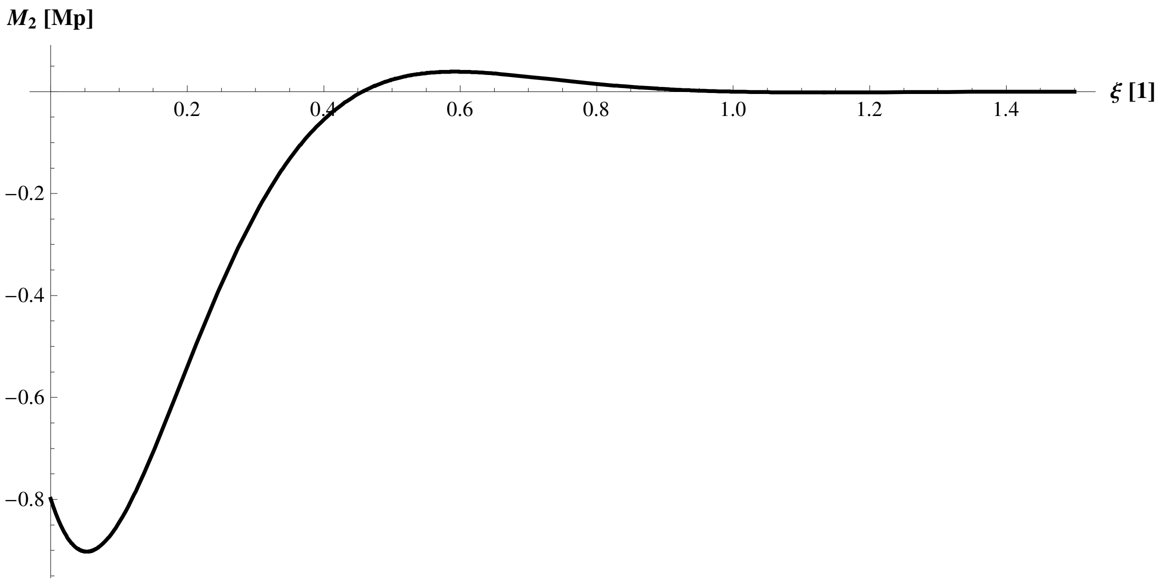
- **Siła równoleżnikowa**

$N_1 = X_1 N_1(X_1) + X_2 N_1(X_2)$



- **Moment południkowy**

$M_2 = X_1 M_2(X_1) + X_2 M_2(X_2)$

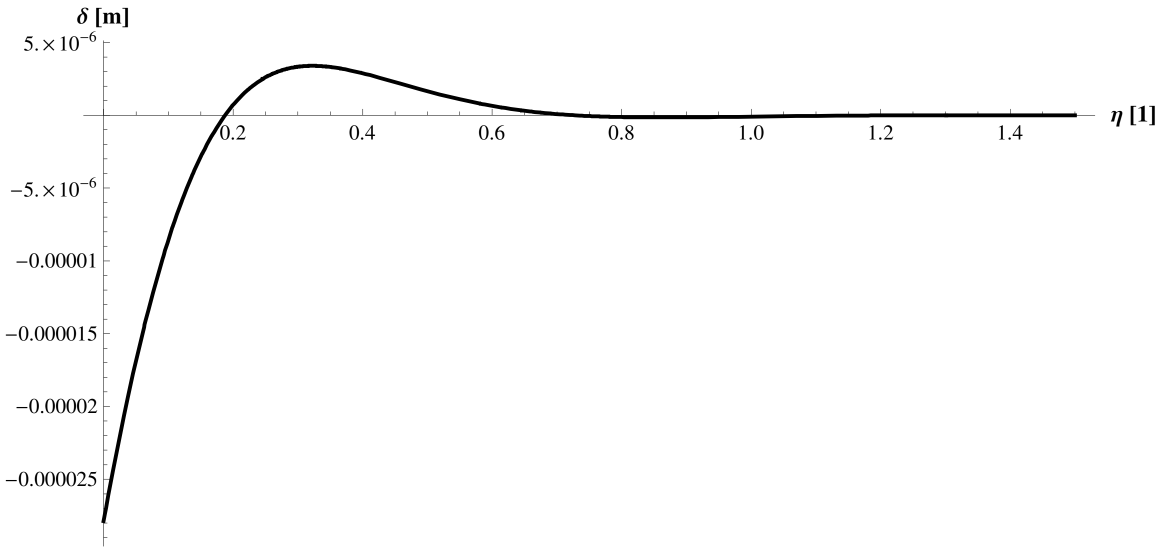


Wykres przemieszczenia normalnego

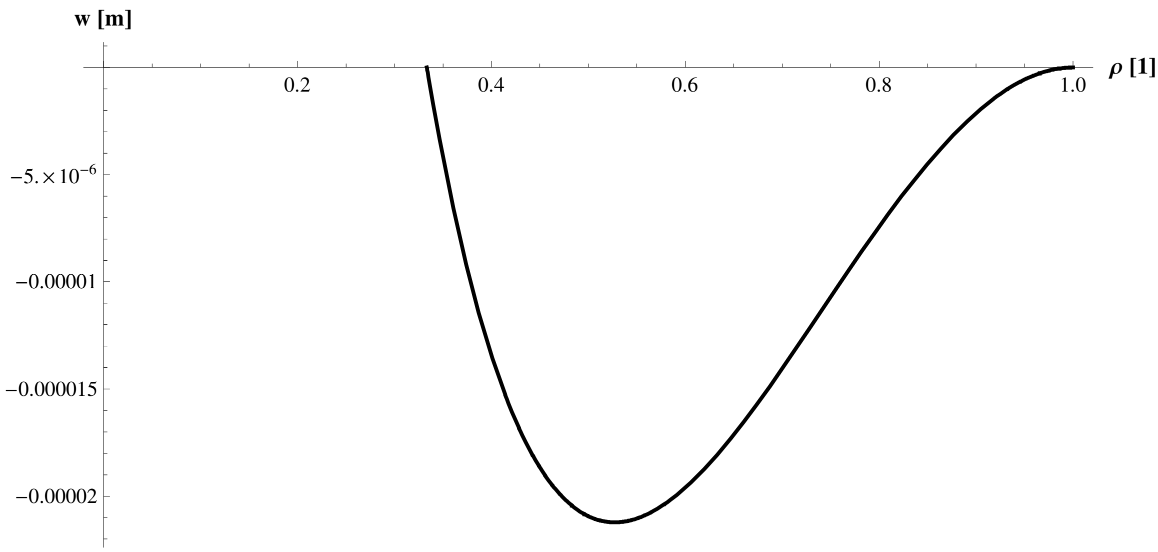
W dalszej cześci pracy przyjęto następujące dane:

```
Mp → 1000
a → 3
```

- **Walca**



- **Płyty (wykres ugięcia)**



Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia płyty z walcem

- **Zgodność przemieszczeń**

  Walec

  $\delta_s = X_1\ \delta_{11\,w} + X_2\ \delta_{12} = 1.05199 \times 10^{-6}$

  Płyta

  $\delta_p = \delta_{11\,p}\ X_1 = -1.05199 \times 10^{-6}$

- **Zgodność kątów obrotu**

  Walec

  $\chi_s = \delta_{12}\, X1 + \delta_{20\,s} + \delta_{22\,s}\ X_2 = 0.0000301214$

  Płyta

  $\chi_p = \delta_{20\,p} + \delta_{22\,p} X_2 = -0.0000301214$

Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995

Zadanie 2

Dane

$$\text{pdane} = \left\{\text{E1} \to \frac{2.10\times 10^4}{1-0.3^2}(*\text{kN}/\text{cm}^2*),\ \text{G} \to \frac{2.10\times 10^4}{2*(1+0.3)}(*\text{kN}/\text{cm}^2*),\ \text{Jz} \to 20*\frac{0.8^3}{12}(*\text{cm}^4*),\ \text{Js} \to \frac{20\times 0.8^3}{3}(*\text{cm}^4*),\ \text{l} \to 200(*\text{cm}*)\right\}$$

{E1 → 23 076.9, G → 8076.92, Jz → 0.853333, Js → 3.41333, l → 200}

Siła krytyczna

$$\text{Pkr} = \frac{\pi^2\ \text{E1 Jz}}{\text{l}^2}\ /.\ \text{pdane}\ (*\text{kN}*)$$

4.85888

Moment krytyczny

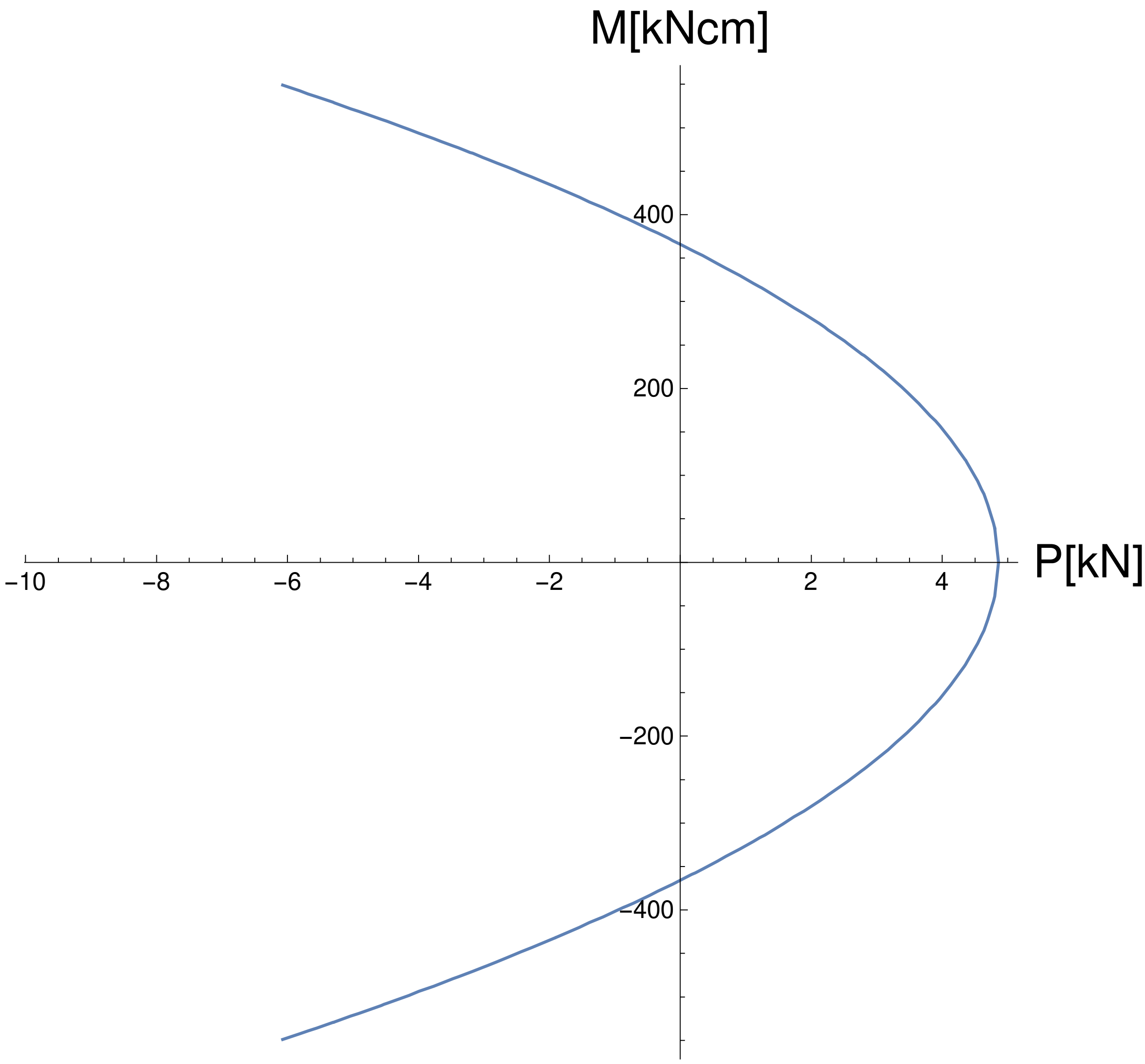
$$\text{Mkr} = \frac{\pi}{\text{l}}\sqrt{\text{E1 Jz G Js}}\ /.\ \text{pdane}\ (*\text{kNcm}*)$$

366.

Obszar bezpieczny

Por. notatki z wykładu

$$\text{f}[\text{P\_},\ \text{M\_}] := \frac{\text{P}}{\text{Pkr}} + \left(\frac{\text{M}}{\text{Mkr}}\right)^2$$


M[kNcm]
400
200
-200
-400
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
P[kN]