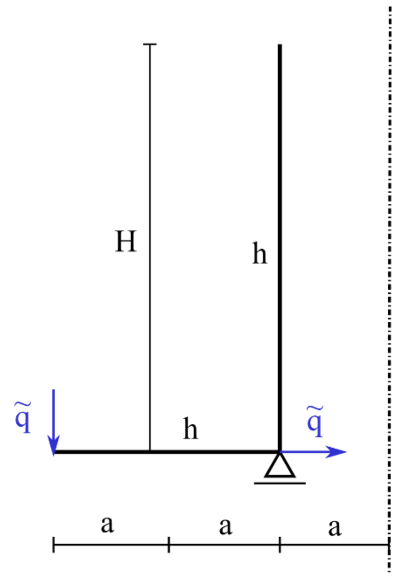
EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. dnia 24 VI 2023

<table>
<tr><td colspan="3">NAZWISKO Imię</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nr albumu</td><td>Oceny z ćwiczeń :</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena
zadania 1</td><td rowspan="2">ocena
zadania 2</td><td colspan="2">Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

Zadanie 1.

Dany jest zbiornik obciążony jak na rysunku. Omówić możliwie dokładnie kolejne kroki analizy statycznej. Dane są: moduł Younga E = 20 GPa, współczynnik Poissona ν = 0.2, grubość ścianek h = a/20. Założyć H >> a. Jednostka obciążenia $\tilde{q}$ wynosi [N/m].

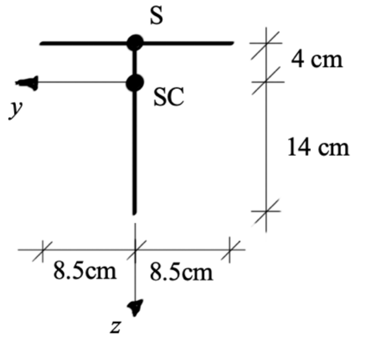


Zadanie 2.

Dany jest pręt o profilu teowym 1/2 IPE 360, o długości L = 1400 cm oraz podparty widełkowo na obu końcach. Zakładając, że do obu przekrojów brzegowych przyłożone są równomiernie rozłożone normalne naprężenia ściskające równe $\sigma_x = -P/A$ należy:

a) obliczyć najmniejszą siłę krytyczną P_{kr},
b) znaleźć postać wyboczenia odpowiadającą tej sile krytycznej.

Przyjąć następujące stałe materiałowe: E = 20500 kN/cm^2, ν = 0.3 oraz charakterystyki geometryczne przekroju jak poniżej:



A = 36.4 cm^2

I_y = 992. cm^4

I_z = 521. cm^4

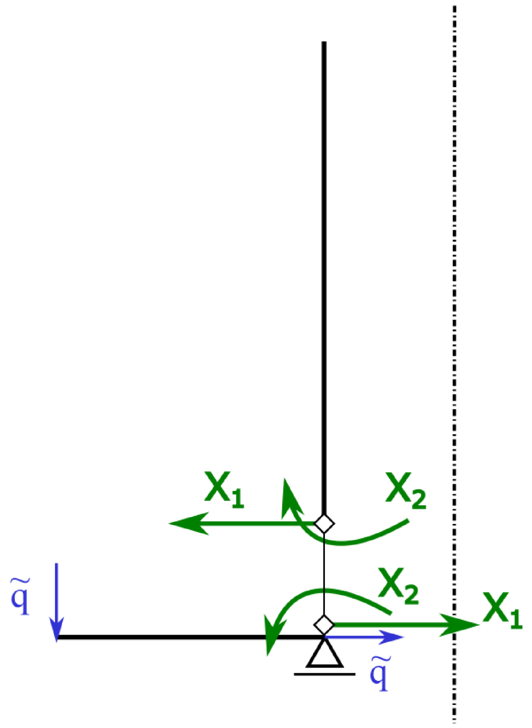
I_ω = 0. cm^6

I_s = 18.7 cm^4

Zadanie 2

Schemat zastępczy

In[1114]:=



Równania nierozdzielności

$\delta_{11}\ X_1 + \delta_{12}\ X_2 + \delta_{10} = 0$

$\delta_{21}\ X_1 + \delta_{22}\ X_2 + \delta_{20} = 0$, gdzie:

$\delta_{11} = \delta_{11\,w} + \delta_{11\,p}$

$\delta_{12} = \delta_{12\,w}$

$\delta_{22} = \delta_{22\,w} + \delta_{22\,p}$

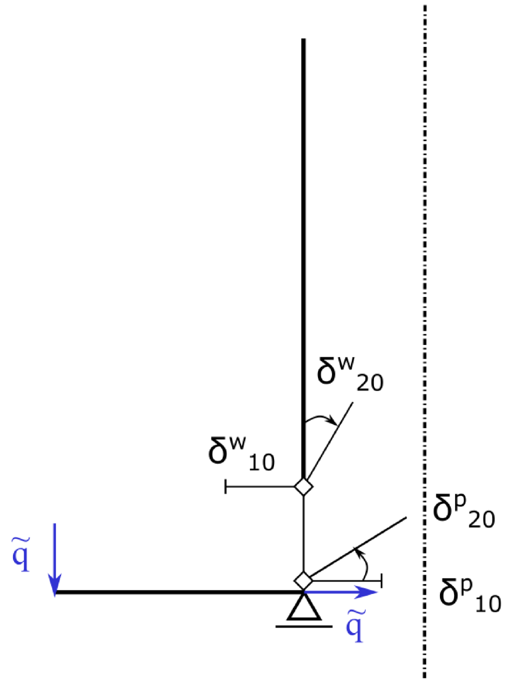
$\delta_{10} = \delta_{10\,p}$

$\delta_{20} = \delta_{20\,p}$

'p' - oznacza przemieszczenia płyty, a 'w'walca.

Stan “0”

In[1117]:=



Płyta - stan zgięciowy

Całka ogólna równania różniczkowego ugięcia płyty (R- zewnętrzny promień płyty pierścieniowej) i zależności między ugięciem, a: kątem obrotu przekrojów, siłami wewnętrznymi.

$$w = C_4 + C_2\,\rho^2 + C_3\,\mathrm{Log}[\rho] + C_1\,\rho^2\,\mathrm{Log}[\rho]$$

$$\varphi = \frac{1}{R}\frac{d w}{d\rho} = \frac{\frac{C_3}{\rho} + C_1\,\rho + 2\,C_2\,\rho + 2\,C_1\,\rho\,\mathrm{Log}[\rho]}{R}$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2}\left(-\frac{d^2 w}{d^2\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{d w}{d\rho}\right) =$$

$$-\frac{D\left(C_3\,(-1+\nu) + (2\,C_2\,(1+\nu) + C_1\,(3+\nu))\,\rho^2 + 2\,C_1\,(1+\nu)\,\rho^2\,\mathrm{Log}[\rho]\right)}{R^2\,\rho^2}$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d w}{d\rho}\right)\right) = -\frac{4\,D\,C_1}{R^3\,\rho}$$

Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = q$$

$$M_2(1) = 0$$

$$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

Uwględniamy dane

$$D = \frac{E\left(\frac{a}{20}\right)^3}{12\left(1 - 0.2^2\right)}$$

$$D \to 0.0000108507\,E\,a^3$$

$$\nu \to 0.2$$

$$h \to \frac{a}{20}$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{20\,p} = \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{542340.\,q}{E\,a}$$

Płyta - stan tarczowy

Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = \frac{B}{r} + A\,r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\,\epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} - \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} + \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{q}{h},\quad \sigma_{rr}(3a) = 0$$

$$A = -\frac{2.\,q}{E\,a}$$

$$B = -\frac{27.\,a\,q}{E}$$

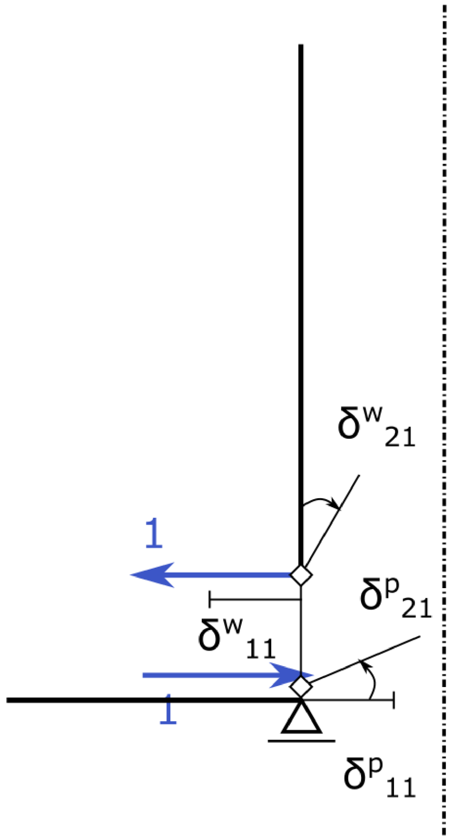
Ostatecznie.

$$u = -\frac{27.\,a\,q}{E\,r} - \frac{2.\,q\,r}{E\,a}$$

$$\delta_{10\,p} = -u(a) = \frac{29.\,q}{EE}$$

Stan $X_1 = 1$

In[1149]:=



Walec

Rozkład sił wewnętrznych.

$$\xi = \frac{y}{a}$$

$$N_1 = 2\, e^{-\lambda \xi} \lambda\, \mathrm{Cos}[\lambda \xi]$$

$$Q_2 = -e^{-\lambda \xi} (\mathrm{Cos}[\lambda \xi] - \mathrm{Sin}[\lambda \xi])$$

$$M_2 = \frac{a\, e^{-\lambda \xi} \mathrm{Sin}[\lambda \xi]}{\lambda}$$

$$M_1 = \nu\, M_2 = \frac{a\, e^{-\lambda \xi} \nu\, \mathrm{Sin}[\lambda \xi]}{\lambda}$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\chi = -\frac{2\, e^{-\lambda \xi} \lambda^2 (\mathrm{Cos}[\lambda \xi] + \mathrm{Sin}[\lambda \xi])}{E\, h}$$

$$\delta = \frac{2\, a\, e^{-\lambda \xi} \lambda\, \mathrm{Cos}[\lambda \xi]}{E\, h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{11\,w} = \frac{2\, a\, \lambda}{E\, h}$$

$$\delta_{21\,w} = \frac{2\, \lambda^2}{E\, h}$$

■ Płyta

Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = \frac{B}{r} + A r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{\mathrm{d} u}{\mathrm{d} r} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\ \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A E}{-1+\nu} - \frac{B E}{r^2\ (1+\nu)}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\ \epsilon_{rr} + \ \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A E}{-1+\nu} + \frac{B E}{r^2\ (1+\nu)}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{1}{h_2},\ \sigma_{rr}(3\ a) = 0$$

$$A = -\frac{2.}{E a}$$

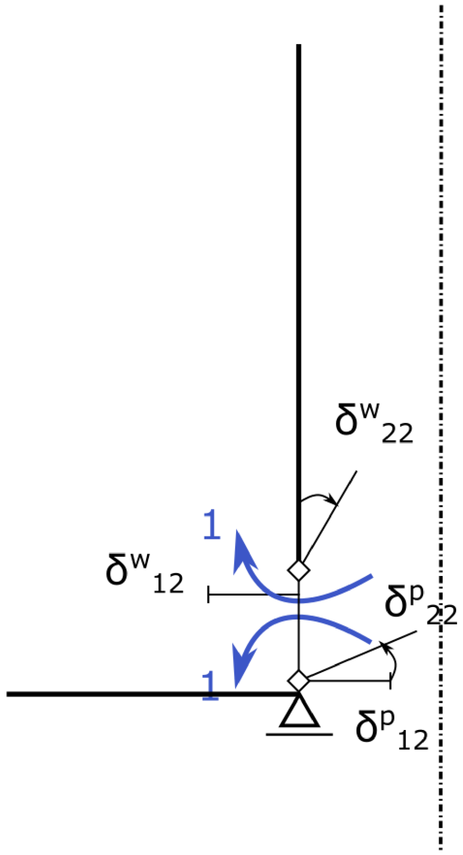
$$B = -\frac{27.\ a}{E}$$

Ostatecznie.

$$u = -\frac{27.\ a}{E r} - \frac{2.\ r}{E a}$$

$$\delta_{11\ p} = -\ u(a) = \frac{29.}{EE}$$

Stan $X_2 = 1$



- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$N_1 = -\frac{2\, e^{-\lambda\xi}\, \lambda^2\, (\mathrm{Cos}[\lambda\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\xi])}{a}$$

$$Q_2 = -\frac{2\, e^{-\lambda\xi}\, \lambda\, \mathrm{Sin}[\lambda\xi]}{a}$$

$$M_2 = -e^{-\lambda\xi}\, (\mathrm{Cos}[\lambda\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\xi])$$

$$M_1 = \nu\, M_2 = e^{-\lambda\xi}\, \nu\, (\mathrm{Cos}[\lambda\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\xi])$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\delta = -\frac{2\, e^{-\lambda\xi}\, \lambda^2\, (\mathrm{Cos}[\lambda\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\xi])}{E\, h}$$

$$\chi = \frac{4\, e^{-\lambda\xi}\, \lambda^3\, \mathrm{Cos}[\lambda\xi]}{E\, a\, h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{12\,w} = \frac{2\, \lambda^2}{E\, h}$$

$$\delta_{22\,w} = \frac{4\, \lambda^3}{E\, a\, h}$$

- **Płyta**

Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = 0$$
$$M_2(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22\,p} = \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{139\,200.}{E\,a^2}$$

Rozwiązanie układu równań

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy najstępujące siły wewnętrzne.

$$X_1 = -\frac{4800.\,q\left(-2.79894\times10^{-6}\,E\,a^4\,\lambda^2 + 0.0000108507\,E\,a^3\left(0.048\,a + 0.0000275862\,a\,\lambda^3\right)\right)}{E\,a^2\left(0.0025\,a^2 + 9.90884\times10^{-7}\,a^2\,\lambda^4 + \frac{1}{20}\,a^2\,\lambda\left(0.0689655 + 0.0000287356\,\lambda^2\right)\right)}$$

$$X_2 = -\frac{4800.\,q\left(2.02923\times10^{-6}\,E\,a^4 + 2.79894\times10^{-6}\,E\,a^4\,\lambda - 1.49665\times10^{-10}\,E\,a^4\,\lambda^2\right)}{E\,a\left(0.0025\,a^2 + 9.90884\times10^{-7}\,a^2\,\lambda^4 + \frac{1}{20}\,a^2\,\lambda\left(0.0689655 + 0.0000287356\,\lambda^2\right)\right)}$$

Dalej przyjęto następujące dane liczbowe.

$$E \to 20\,000\,000\,000$$
$$\nu \to 0.2$$

Z przyjętych danych wynikają następujące wartości sztywności płytowej (płyty dennej) i współczynnika λ.

$$D = \frac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)} = 217\,014.\,a^3$$

$$\lambda = \left(\frac{3\left(1-\nu^2\right)a^2}{h^2}\right)^{0.25} = 5.8259$$

Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości.

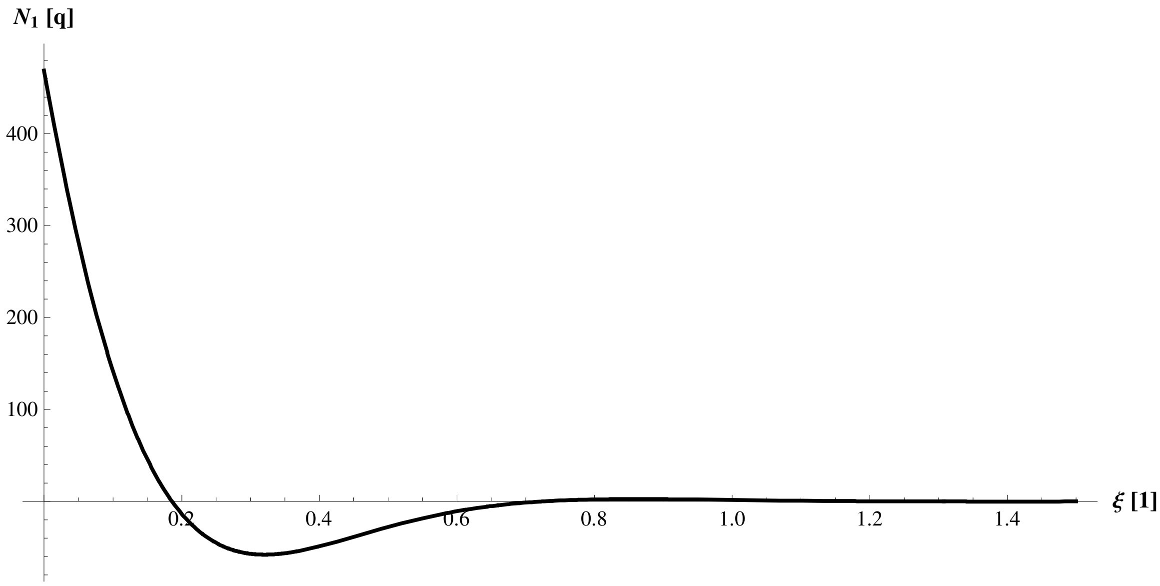
$$X_1 = 18.8721\,q$$
$$X_2 = -3.66382\,a\,q$$

Wykresy sił wewnętrznych

- **Siła równoleżnikowa**

$N_1 = X_1\ N_1(X_1) + X_2\ N_1(X_2)$

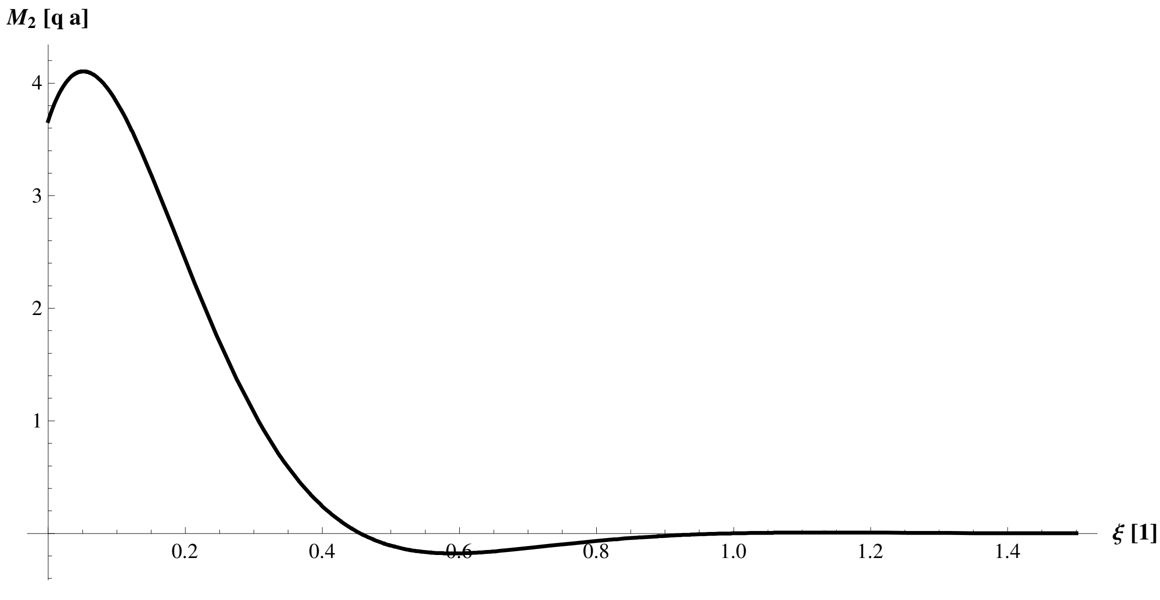
Out[1222]=



- **Moment południkowy**

$M_2 = X_1\ M_2(X_1) + X_2\ M_2(X_2)$

Out[1227]=



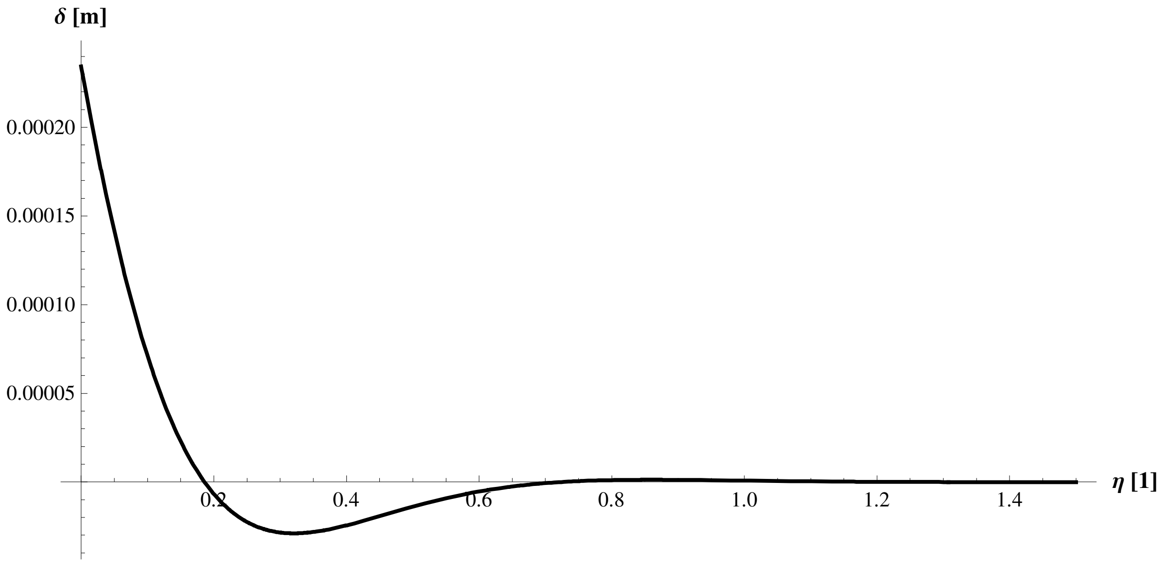
Wykres przemieszczenia normalnego

W dalszej cześci pracy przyjęto następujące dane:

```
q → 500
a → 3
```

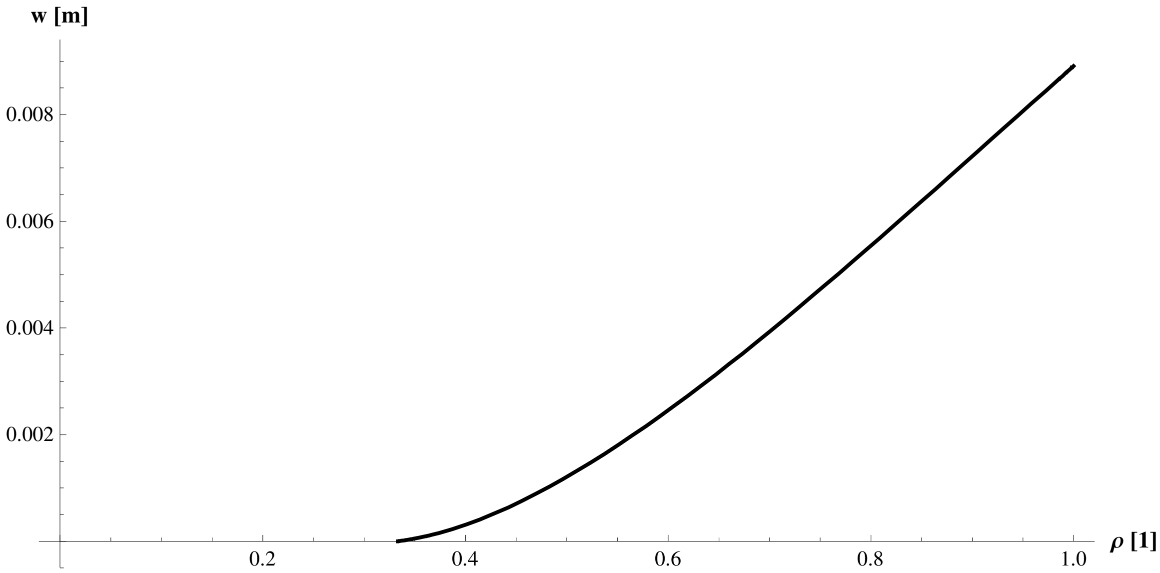
- **Walca**

Out[1233]=



- **Płyty (wykres ugięcia)**

Out[1237]=



Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia płyty z walcem

- **Zgodność przemieszczeń**

  Walec

  $\delta_s = X_1\ \delta_{11\,w} + X_2\ \delta_{12} = -0.0000144073$

  Płyta

  $\delta_p = \delta_{10\,p} + \delta_{11\,p}\ X_1 = 0.0000144073$

- **Zgodność kątów obrotu**

  Walec

  $\chi_s = \delta_{12}\,X1 + \delta_{20\,s} + \delta_{22\,s}\ X_2 = -0.00026947$

  Płyta

  $\chi_p = \delta_{20\,p} + \delta_{22\,p}\,X_2 = 0.00026947$

Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995

Egzamin MK KB ustac. 24.07.2023r. Zadanie 2

Zakładając, że f. ugięć oraz kąta skręcenia są postaci:

$$w(\xi) = w_0 \sin(\pi\xi), \quad v(\xi) = v_0 \sin(\pi\xi), \quad \Theta(\xi) = \Theta_0 \sin(\pi\xi),$$

gdzie $\xi = \frac{x}{L}$, równania rozwiązujące uwzględniające efekty II rzędu sprowadzają się do układu równań algebraicznych:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_Y^{KR} - P & 0 & P \cdot y_S \\ 0 & P_Z^{KR} - P & -P \cdot z_S \\ P \cdot y_S & -P \cdot z_S & (P_S^{KR} - P) \cdot r_0^2 \end{bmatrix}}_{=: \Phi(P)} \begin{bmatrix} w_0 \\ v_0 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} = 22527.5 \, kN/cm^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 7884.62 \, kN/cm^2$$

gdzie, podstawiając dane:

$$y_S = 0, \quad z_S = -4 cm, \quad r_0^2 = \frac{J_Y + J_Z}{A} + y_S^2 + z_S^2 = 57.566 cm^2,$$

$$P_Y^{KR} = \frac{\pi^2 E_1 J_Y}{L^2} = 112.53 kN, \quad P_Z^{KR} = \frac{\pi^2 E_1 J_Z}{L^2} = 59.101 kN,$$

$$P_S^{KR} = \frac{1}{r_0^2}\left(\frac{\pi^2 E_1 J_\omega}{L^2} + G J_S\right) = 2561.28 kN$$

$J_\omega = 0$

Warunek na siłę krytyczną: $\boxed{\det \Phi(P) = 0}$,

a więc, biorąc pod uwagę, że $y_S = 0$:

$$(P_Y^{KR} - P)\left[(P_Z^{KR} - P)(P_S^{KR} - P) \cdot r_0^2 - P \cdot z_S^2\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad P = P_Y^{KR} \quad \text{lub} \quad (r_0^2 - z_S^2) P^2 - r_0^2 (P_Z^{KR} + P_S^{KR}) \cdot P + P_Z^{KR} \cdot P_S^{KR} \cdot r_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow P = 112.53 kN \quad \text{lub} \quad 41.566 cm^2 \cdot P^2 - 150885 kN \cdot cm^2 \cdot P + 8714007 kN^2 cm^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow P = 112.53 kN \quad \text{lub} \quad P = P_{I/II} = \frac{150885 kNcm^2 \mp \sqrt{(150885 kNcm^2)^2 - 4 \cdot 41.566 cm^2 \cdot 8714007 kN^2 cm^2}}{2 \cdot 41.566 cm^2} = \begin{matrix} 58.718 kN \\ 3570.33 kN \end{matrix}$$

Odpowiedź na zadanie 2a):

$$\boxed{P_{KR} = \min\{P_Y^{KR}, P_I, P_{II}\} = P_I = 58.718 kN.}$$

Układ równań przy $P = P_{KR}$, tj. $\Phi(P_{KR})[w_0 \; v_0 \; \Theta_0]^T = [0 \; 0 \; 0]^T$

$$\begin{bmatrix} 53.812 kN & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0.383 kN} & \cancel{234.872 kN \cdot cm} \\ 0 & 234.872 kN \cdot cm & 144062 kN \cdot cm^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ v_0 \\ \Theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cancel{0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie zależności lin. wierszy 2 i 3:

$$\frac{234.872 kN \cdot cm}{0.383 kN} = 613.243 cm$$

SLI ✓

$$\frac{144062 kN \cdot cm^2}{234.872 kN \cdot cm} = 613.364 cm$$

Skreślając np. równanie 2 dostajemy odpowiedź ~~na zadanie~~ 2b):

$$w_0 = 0$$

$$\Theta_0 = A, \quad v_0 = -\frac{144062 kNcm^2}{234.872 kNcm} A = 613.364 cm \cdot A$$

Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski