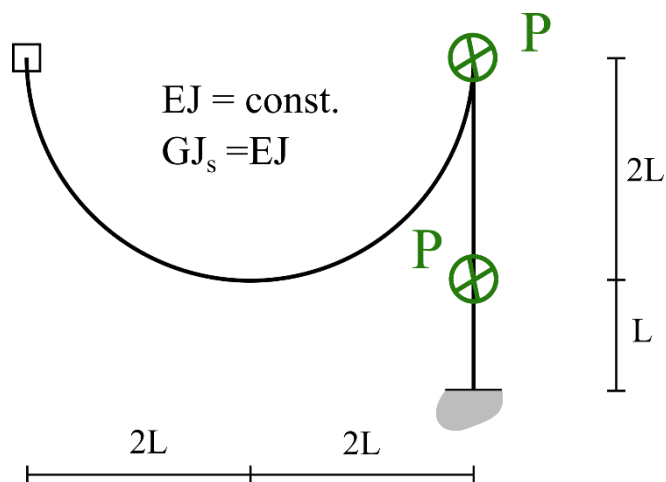


NAZWISKO Imię		
Nr albumu		Ocena z ćwiczeń :
ocena zadania 1	ocena zadania 2	Ocena z egzaminu po ustnym
		Ocena łączna, data, podpis

**Zadanie 1.** Dany jest pręt zakrzywiony w planie obciążony jak na rysunku. Znaleźć rozkład momentów zginających i skręcających.



**Zadanie 2.** Dana jest płyta kołowa wzmocniona wieńcem podporowym obciążona jak na rysunku. Sporządzić wykresy: ugięcia płyty, rozkładów momentów zginających w płycie oraz znaleźć kąt skręcenia pierścienia  $\theta_A$ . Powierzchnia środkowa płyty jest przesunięta o  $0,5 d$  względem osi wieńca.

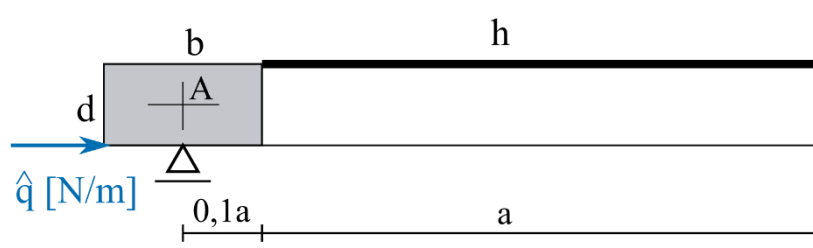
$$h = a/20$$

$$b = 0,2 a$$

$$d = 0,1 a$$

$$E = 30 \text{ GPa}$$

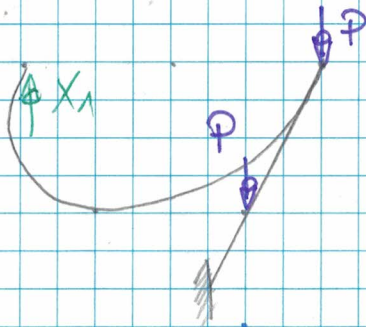
$$\nu = 0,2$$



# Σ ADANIE 1

USW

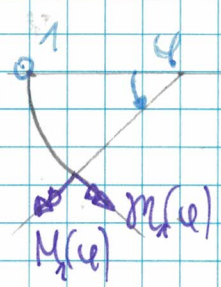
$$y_{\delta} = \delta y$$



r-nie zgodności

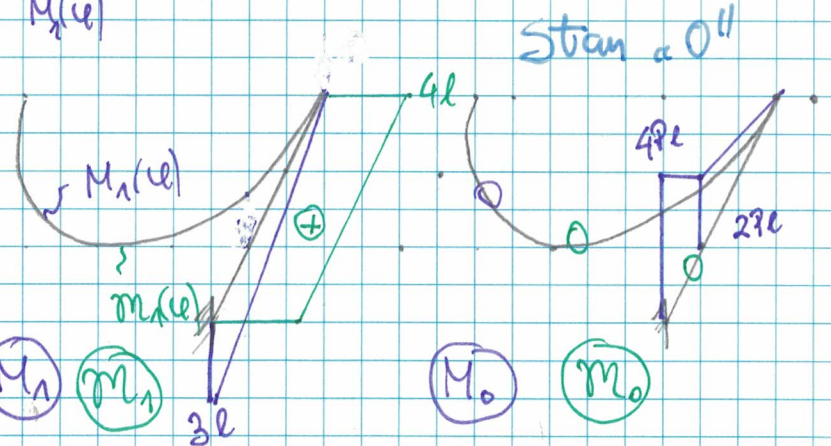
$$\delta u_{X_1} + \delta u_0 = 0$$

stan  $X_1 = 1$



$$M(\varphi) = -1 \cdot 2L(1 - \cos \varphi)$$

$$M(\varphi) = 2L \sin \varphi$$



stan  $\alpha = 0''$

$$\delta u = \frac{1}{EY} \left[ \frac{1}{2} \cdot 3L \cdot 3L \cdot \frac{2}{3} \cdot 2L + 4L \cdot 3L \cdot 4L \right]$$

$$+ \frac{1}{EY} \int_0^{\pi} (-1 \cdot 2L(1 - \cos \varphi))^2 2L d\varphi +$$

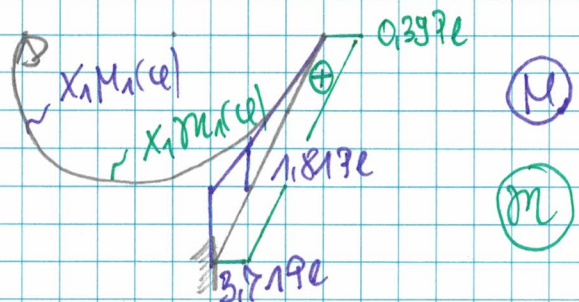
$$+ \frac{1}{EY} \int_0^{\pi} (2L \sin \varphi)^2 2L d\varphi = (57 + 16\pi) \frac{L^3}{EY} \approx 107,27$$

$$\delta u_0 = \frac{1}{EY} \left[ \frac{1}{2} \cdot 2PL \cdot 2L \left(-\frac{2}{3} \cdot 2L\right) + \frac{1}{2} \cdot 2PL \cdot L \left(-\frac{2}{3} \cdot 2L - \frac{1}{2} \cdot 2L\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{4PL}{2} \cdot L \left(-\frac{2}{3} \cdot 2L - \frac{1}{3} \cdot 2L\right) \right] = -\frac{31}{3} \frac{PL^3}{EY}$$

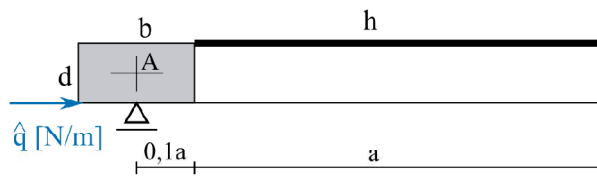
$$\approx -10,333$$

$$X_1 = - \frac{\delta u_0}{\delta u} = 0,096 P$$



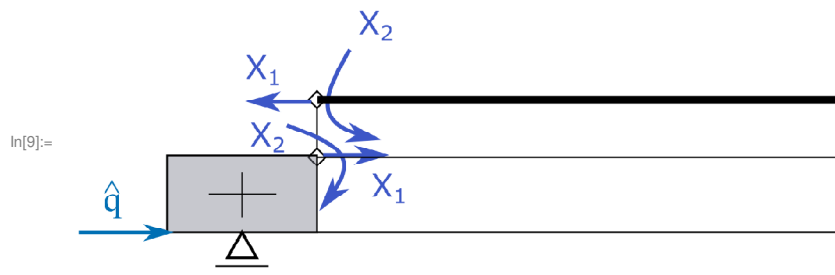
## Zadanie 2

$h = a/20$   
 $b = 0,2 a$   
 $d = 0,1 a$   
 $E = 30 \text{ GPa}$   
 $\nu = 0,2$



$b \rightarrow 0.2 a$   
 $d \rightarrow 0.1 a$   
 $E \rightarrow 30\,000\,000$   
 $\nu \rightarrow 0.2$   
 $h \rightarrow \frac{a}{20}$   
 $R \rightarrow a$   
 $R_p \rightarrow 1.1 a$

## Schemat zastępczy



## Równania nierozdzielności

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0, \text{ gdzie:}$$

$$\delta_{11} = \delta_{11pp} + \delta_{11p}$$

$$\delta_{12} = \delta_{12p}$$

$$\delta_{22} = \delta_{22pp} + \delta_{22p}$$

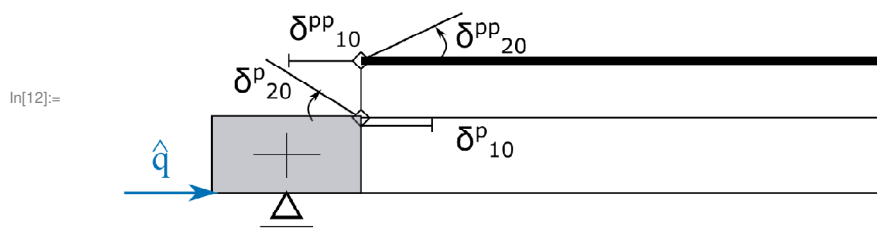
$$\delta_{10} = \delta_{10p}$$

$$\delta_{20} = \delta_{20p}$$

'p' - oznacza przemieszczenia

pierścienia, 'pp' - oznacza przemieszczenia płyty kołowej.

## Stan "0"



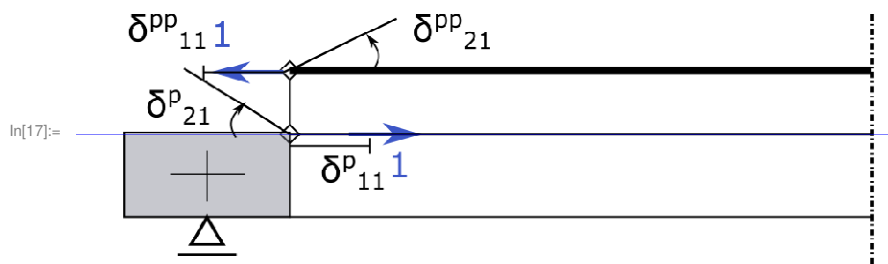
### ■ Pierścień

Skorzystamy z notatek ze zjazdu nr 4 lub [1]

$$\delta_{10p} = \frac{R_p^2}{E b d} q - \frac{3 R_p^2}{E b d} q = -\frac{2.42 a^2 q}{E b d}$$

$$\delta_{20p} = -\frac{6 R_p^2}{E b d^2} q \frac{1}{2} d = -\frac{3.63 a^2 q}{E b d^2}$$

## Stan $X_1 = 1$



### ■ Płyta kołowa

Płyta denna pracuje w stanie tarczowym. Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = A r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{d u}{d r} = A$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{rr} + \nu \epsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{A E}{1 - \nu}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{A E}{1 - \nu}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{1}{h_2}$$

$$A = \frac{1 - \nu}{E h}$$

Ostatecznie.

$$u = \frac{r (1 - \nu)}{E h}$$

$$\delta_{11 pp} = u(a) = \frac{16 \cdot}{E}$$

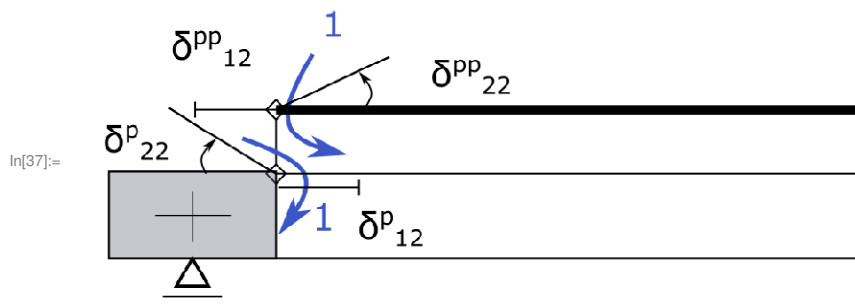
### ■ Pierścień

Skorzystamy z notatek ze zjazdu nr 4 lub [1]

$$\delta_{11 p} = \frac{4 R_p^2}{E b d} = \frac{4 \cdot 84 a^2}{E b d}$$

$$\delta_{21 p} = \frac{6 R_p^2}{E b d^2} = \frac{7 \cdot 26 a^2}{E b d^2}$$

## Stan $X_2 = 1$



### ■ Płyta kołowa

Warunki brzegowe.

$$w = C_2 + C_1 \rho^2$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \frac{d w}{d \rho} = \frac{2 C_1 \rho}{R}$$

$$M_1 = \frac{D}{R^2} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{d w}{d \rho} - \nu \frac{d^2 w}{d \rho^2} \right) = -\frac{2 D C_1 (1 + \nu)}{R^2}$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2} \left( -\frac{d^2 w}{d \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d w}{d \rho} \right) = -\frac{2 D C_1 (1 + \nu)}{R^2}$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3} \frac{d}{d \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d \rho} \left( \rho \frac{d w}{d \rho} \right) \right) = 0$$

$$w(1) = 0$$

$$M_2(1) = -1$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22 pp} = \varphi(1) = \frac{0.833333 a}{D}$$

### ■ Pierścień

Skorzystamy z notatek ze zjazdu nr 4 lub [1]

$$\delta_{12p} = \frac{6 R_p^2}{E b d^2} = \frac{7.26 a^2}{b d^2 EE}$$

$$\delta_{22p} = \frac{12 R_p^2}{E b d^2} = \frac{14.52 a^2}{b d^3 EE}$$

## Rozwiązanie układu równań

Z przyjętych danych wynika następująca wartość współczynnika  $\lambda$  i sztywności płytowej D.

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} = 325.521 a^3$$

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy następujące wartości nadliczbowych

$$X_1 = 0.452886 q$$

$$X_2 = 0.00114474 a q$$

Przyjmujemy długość  $a$  i intensywność obciążenia  $q$ .

$$a = 1 \text{ m}$$

$$q = 10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości (kN/m i kN).

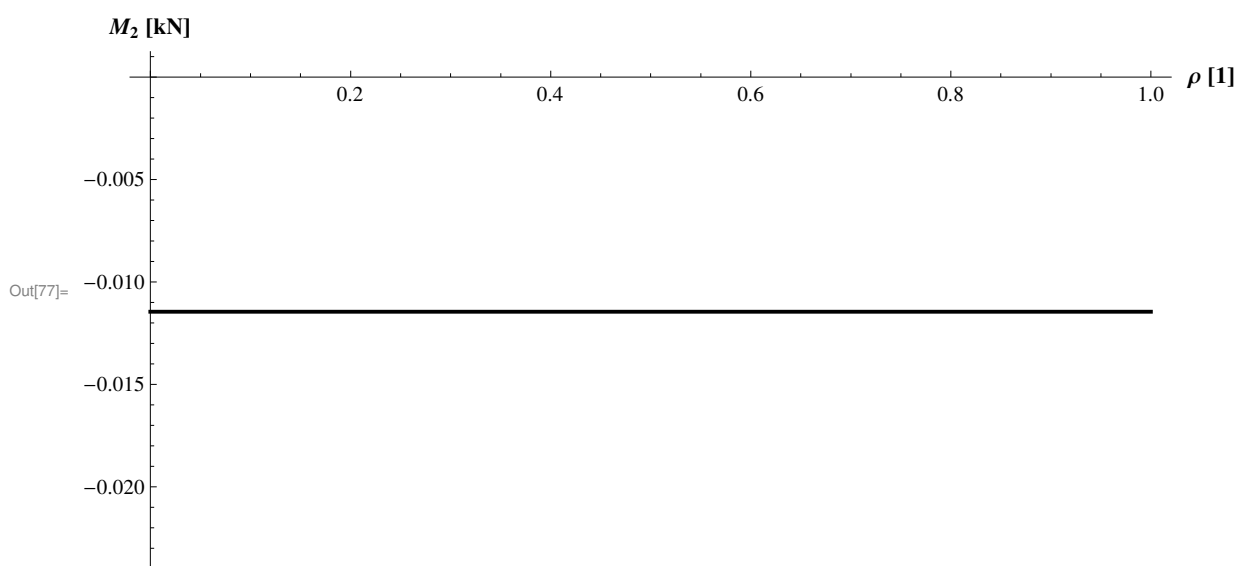
$$X_1 = 4.52886$$

$$X_2 = 0.0114474$$

## Wykresy sił wewnętrznych

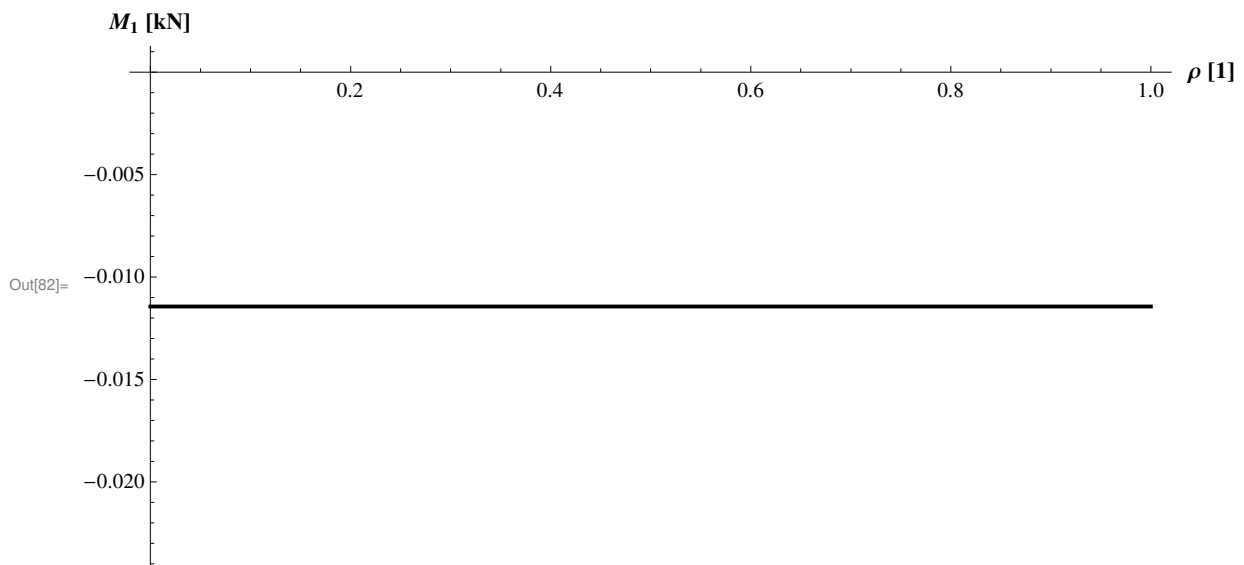
### ■ Moment radialny

$$M_2 = X_2 M_2(X_2)$$



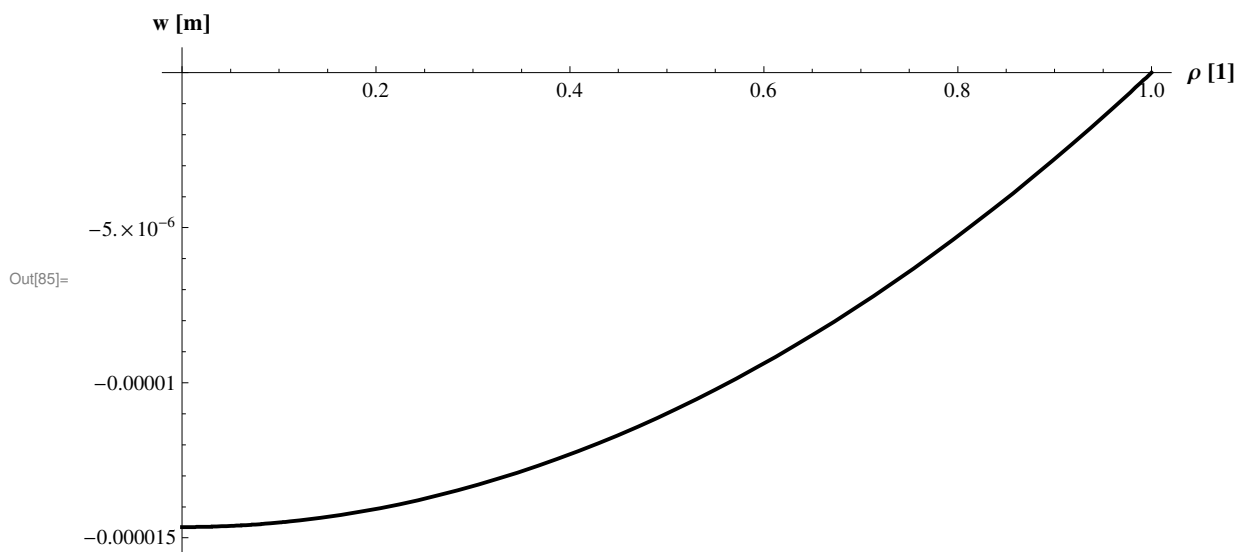
### ■ Moment obwodowy

$$M_1 = X_2 M_1(X_2)$$



## Wykres przemieszczenia normalnego

### ■ Płyty dennej



## Moment zginający w pierścieniu

$$M_p = \left( X_2 + X_1 \frac{d}{2} - q \frac{b}{2} \right) a = -0.026211 a^2 q$$

---

## Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia pierścienia z płytą

### ■ Zgodność przemieszczeń

Płyta pierścieniowa

$$\delta_{pp} = X_1 \delta_{11 pp} = 2.41539 \times 10^{-6}$$

Pierścień

$$\delta_p = \delta_{10 p} + X_1 \delta_{11 p2} + X_2 \delta_{12 p} = -2.41539 \times 10^{-6}$$

### ■ Zgodność kątów obrotu

Płyta pierścieniowa

$$\chi_{pp} = X_2 \delta_{22 pp} = 0.0000293052$$

Pierścień

$$\chi_p = \delta_{20 p} + X_1 \delta_{21 p} + X_2 \delta_{22 p} = -0.0000293052$$

---

## Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995