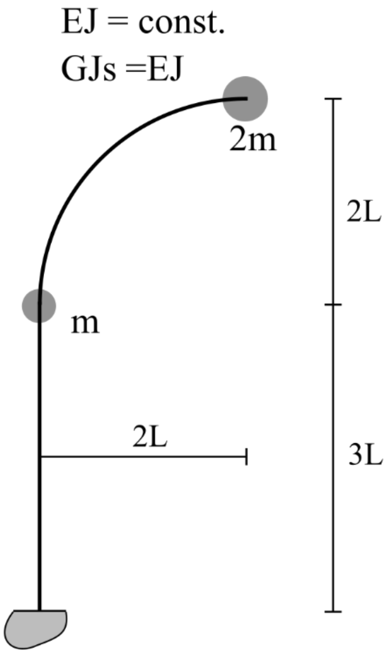
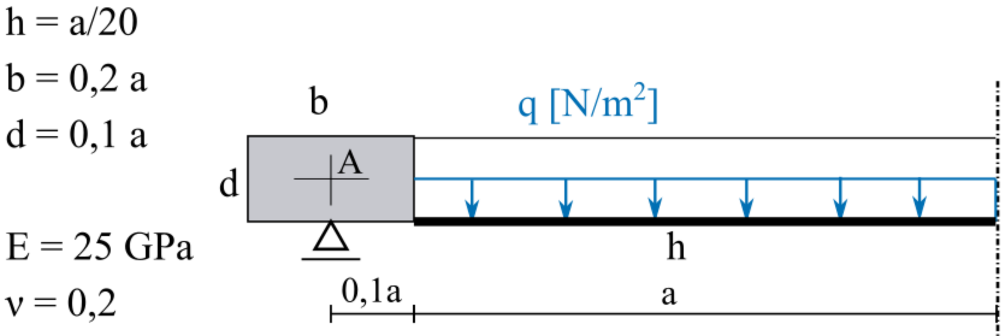
EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. dnia 25 VI 2022

<table>
<tr><td colspan="4">NAZWISKO Imię</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nr albumu</td><td>Ocena z ćwiczeń :</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena
zadania 1</td><td rowspan="2">ocena
zadania 2</td><td colspan="2">Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

Zadanie 1. a) Dany jest nieważki pręt zakrzywiony w planie z masami skupionymi w węzłach. Znaleźć częstości i wektory drgań własnych. b) Omówić metodę transformacji modalnej.



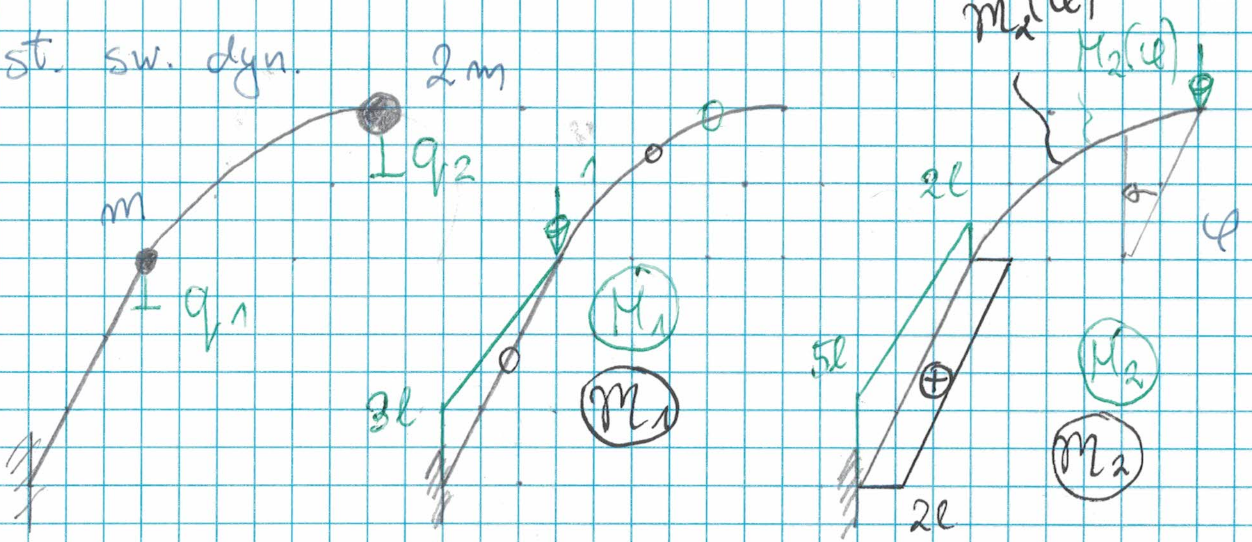
Zadanie 2. Dana jest płyta kołowa wzmocniona wieńcem podporowym obciążona jak na rysunku. Sporządzić wykresy: ugięcia płyty, rozkładów momentów zginających w płycie oraz znaleźć kąt skręcenia pierścienia θ_A. Powierzchnia środkowa płyty jest przesunięta o 0,5 d względem osi wieńca.



ZADANIE 1

$m_2(\varphi) = 2l(1-\cos\varphi)$
$M_2(\varphi) = -2l\sin\varphi$

2 st. sw. dyn.



$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}\,3l\cdot 3l\,\frac{2}{3}\,3l\right] = 9\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}\,3l\cdot 3l\left(\frac{2}{3}5l + \frac{1}{3}2l\right)\right] = 18\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2}\,2l\cdot 3l\left(\frac{2}{3}2l + \frac{1}{3}5l\right) + \frac{1}{2}\,5l\cdot 3l\left(\frac{2}{3}5l + \frac{1}{3}2l\right) + \right.$$
$$+\,2l\cdot 3l\cdot 2l + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2l(1-\cos\varphi)\right)^2 2l\,d\varphi +$$
$$\left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2l\sin\varphi\right)^2 2l\,d\varphi\right] = 60{,}13\,\frac{l^3}{EJ}$$

Macierz podatności $\quad \mathbb{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 60{,}13 \end{bmatrix}$

Macierz mas $\quad \mathbb{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$

Zagadnienie własne drgań $\quad (\mathbb{1} - \omega^2\mathbb{D}\mathbb{M})\,\mathbb{a} = \mathbb{0}$

$\det(\mathbb{1} - \omega^2\mathbb{D}\mathbb{M}) = 0 \Rightarrow \quad \omega_1 = 0{,}0892\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$

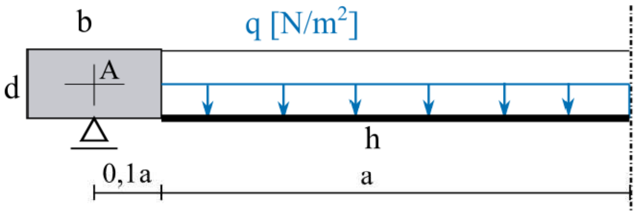
$\omega_2 = 0{,}538\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \qquad \overset{1}{\mathbb{a}} = [\overset{1}{a} \quad 3{,}245\,\overset{1}{a}]^T$

$\overset{2}{\mathbb{a}} = [\overset{2}{a} \quad -0{,}154\,\overset{2}{a}]$

Zadanie 2

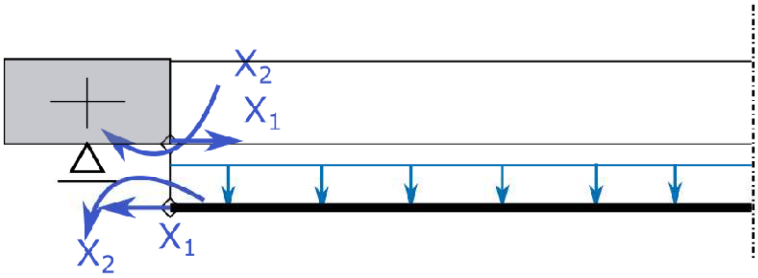
h = a/20
b = 0,2 a
d = 0,1 a

E = 25 GPa
ν = 0,2



$b \to 0.2\,a$
$d \to 0.1\,a$
$E \to 25\,000\,000$
$\nu \to 0.2$
$h \to \frac{a}{20}$
$R \to a$
$R_p \to a$

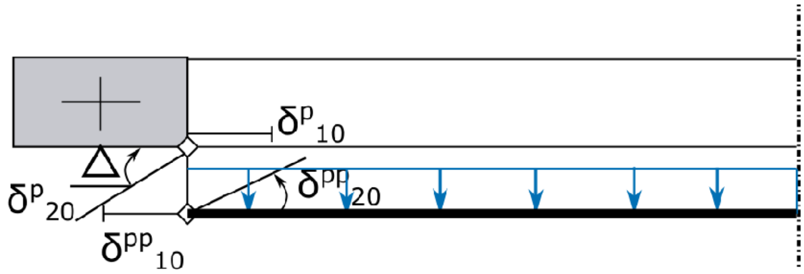
Schemat zastępczy



Równania nierozdzielności

$\delta_{11}\ X_1 + \delta_{12}\ X_2 + \delta_{10} = 0$
$\delta_{21}\ X_1 + \delta_{22}\ X_2 + \delta_{20} = 0$, gdzie:
$\delta_{11} = \delta_{11\,pp} + \delta_{11\,p}$
$\delta_{12} = \delta_{12\,p}$
$\delta_{22} = \delta_{22\,pp} + \delta_{22\,p}$
$\delta_{10} = 0$
$\delta_{20} = \delta_{20\,pp}$
'p' - oznacza przemieszczenia pierścienia,'pp' - oznacza przemieszczenia płyty kołowej.

Stan "0"



- **Płyta pierścieniowa**

Całka ogólna równania różniczkowego ugięcia płyty (R- zewnętrzny promień płyty pierścieniowej) i zależności między ugięciem, a: kątem obrotu przekrojów, siłami wewnętrznymi.

$$w = C_2 + C_1\,\rho^2 + \frac{q\,R^4\,\rho^4}{64\,D}$$

$$\varphi = \frac{1}{R}\frac{dw}{d\rho} = \frac{2\,C_1\,\rho + \frac{q\,R^4\,\rho^3}{16\,D}}{R}$$

$$M_1 = \frac{D}{R^2}\left(-\frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} - \nu\,\frac{d^2 w}{d^2\rho}\right) = -\frac{2\,D\,C_1\,(1+\nu)}{R^2} - \frac{1}{16}\,q\,R^2\,(1+3\,\nu)\,\rho^2$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2}\left(-\frac{d^2 w}{d^2\rho} - \frac{1}{\rho}\,\frac{dw}{d\rho}\right) = -\frac{2\,D\,C_1\,(1+\nu)}{R^2} - \frac{1}{16}\,q\,R^2\,(3+\nu)\,\rho^2$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\,\frac{d}{d\rho}\left(\rho\,\frac{dw}{d\rho}\right)\right) = -\frac{1}{2}\,q\,R\,\rho$$

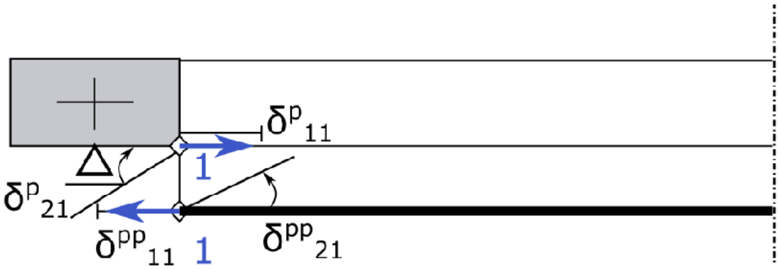
Warunki brzegowe

$$w(1) = 0$$
$$M_2(1) = 0$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{20\,pp} = \varphi(1) = -\frac{0.104167\,a^3\,q}{D}$$

Stan X_1 = 1



- **Płyta pierścieniowa**

Płyta denna pracuje w stanie tarczowym. Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = A\,r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = A$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\,\epsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{A\,E}{1-\nu}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) = \frac{A\,E}{1-\nu}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{1}{h_2}$$

$$A = \frac{1-\nu}{E\,h}$$

Ostatecznie.

$$u = \frac{r\,(1-\nu)}{E\,h}$$

$$\delta_{11\,pp} = u(a) = \frac{16.}{E}$$

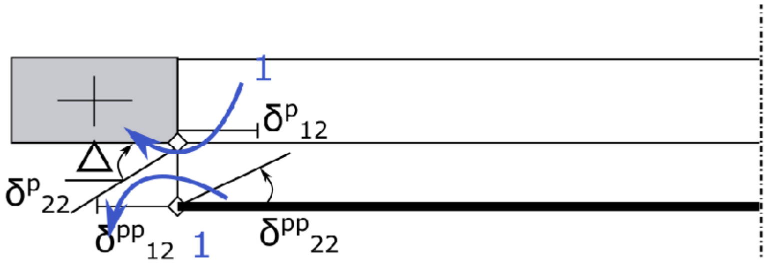
- **Pierścień**

Skorzystamy z notatek ze zjazdu nr 4 lub [1]

$$\delta_{11\,p} = \frac{4\,R_p^2}{E\,b\,d} = \frac{4.84\,a^2}{E\,b\,d}$$

$$\delta_{21\,p} = -\frac{6\,R_p^2}{E\,b\,d^2} = -\frac{7.26\,a^2}{E\,b\,d^2}$$

Stan X_2 = 1



- **Płyta pierścieniowa**

Warunki brzegowe.

$w(1) = 0$

$M_2(1) = -1$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22\,pp} = \varphi(1) = \frac{0.833333\,a}{D}$$

- **Pierścień**

Skorzystamy z notatek ze zjazdu nr 4 lub [1]

$$\delta_{12\,p} = -\frac{6\,R_p^2}{E\,b\,d^2} = -\frac{7.26\,a^2}{E\,b\,d^2}$$

$$\delta_{22\,p} = \frac{12\,R_p^2}{E\,b\,d^2} = \frac{14.52\,a^2}{E\,b\,d^3}$$

Rozwiązanie układu równań

Z przyjętych danych wynika następująca wartość współczynnika λ i sztywności płytowej D.

$$D = \frac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)} = 271.267\,a^3$$

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy najstępujące wartości nadliczbowych

$X_1 = 1.37368\,a\,q$

$X_2 = 0.0976337\,a^2\,q$

Przyjmujemy długość a i intensywność obciążenia q.

$a = 1\ m$

$q = 10\ \frac{kN}{m^2}$

Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości (kN/m i kN).

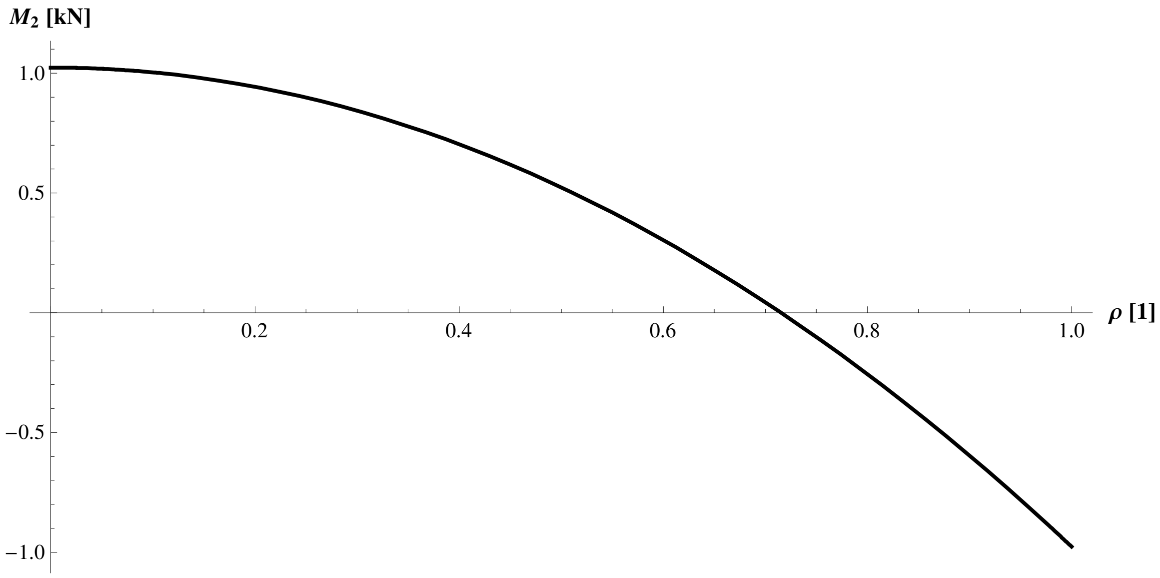
$X_1 = 13.7368$

$X_2 = 0.976337$

Wykresy sił wewnętrznych

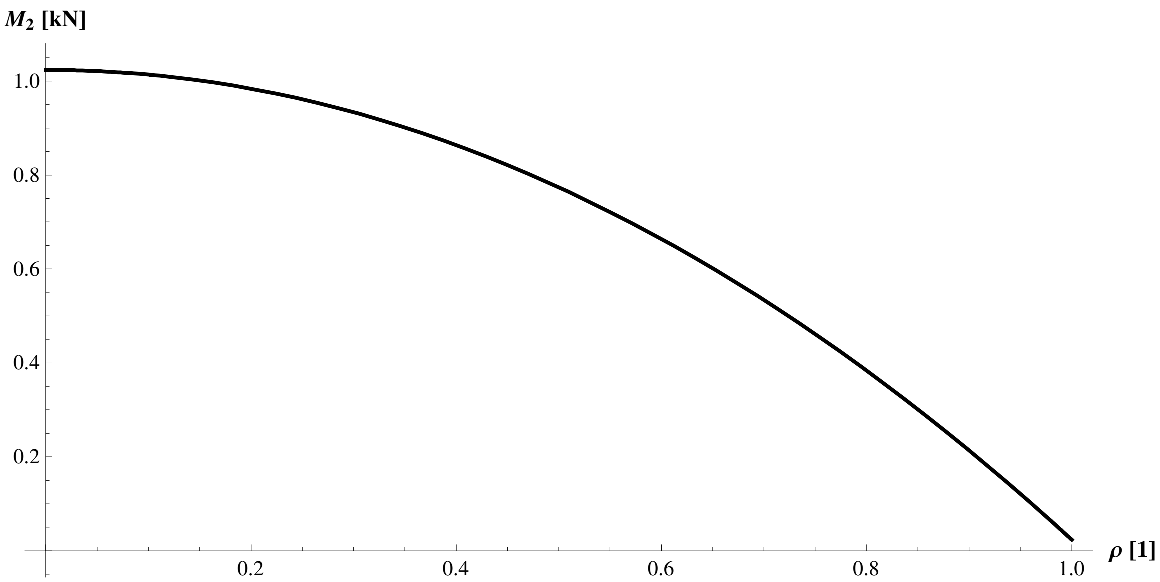
- **Moment radialny**

$M_2 = M_2('0') + X_2 M_2(X_2)$



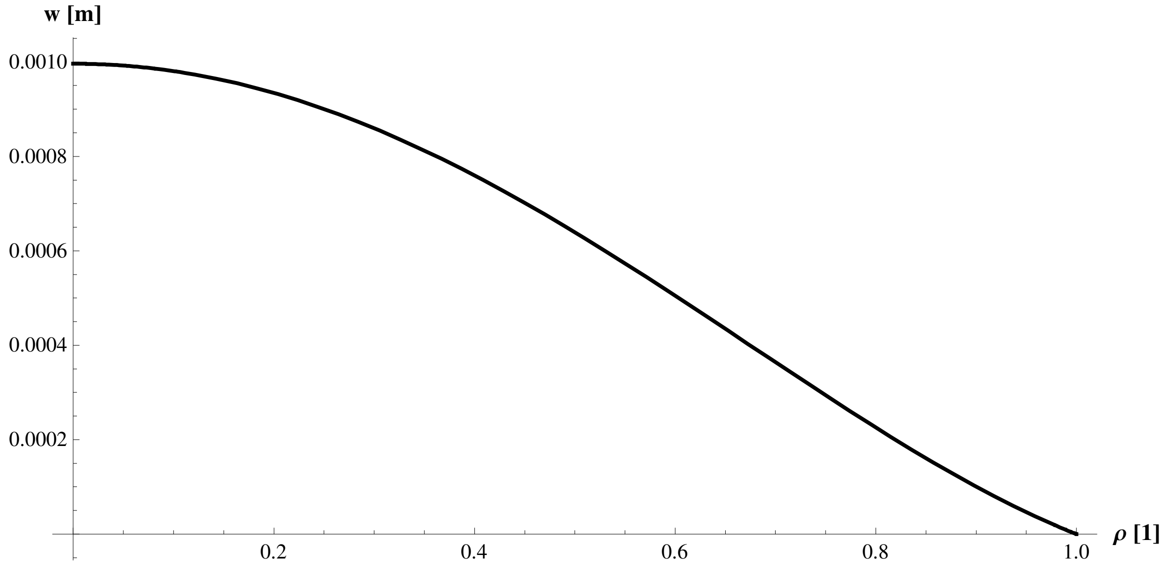
- **Moment obwodowy**

$M_1 = M_1('0') + X_2 M_1(X_2)$



Wykres przemieszczenia normalnego

- **Płyty dennej**



Moment zginający w pierścieniu

$$M_p = \left(X_2 - X_1 \frac{d}{2}\right) a = 0.0289495\, a^3 q$$

Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia pierścienia z płytą

- **Zgodność przemieszczeń**

Płyta pierścieniowa

$\delta_{pp} = X_1\ \delta_{11\,pp} = 8.79157 \times 10^{-6}$

Pierścień

$\delta_p = X_1\ \delta_{11\,p2} + X_2\ \delta_{12\,p} = -8.79157 \times 10^{-6}$

- **Zgodność kątów obrotu**

Płyta pierścieniowa

$\chi_{pp} = \delta_{20\,pp} + X_2\ \delta_{22\,pp} = -0.000840694$

Pierścień

$\chi_p = X_1\ \delta_{21\,p} + X_2\ \delta_{22\,p} = 0.000840694$

Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995