

NAZWISKO Imię		
Nr albumu		Oceny z ćwiczeń :
ocena zadania 1	ocena zadania 2	Ocena z egzaminu po ustnym
		Ocena łączna, data, podpis

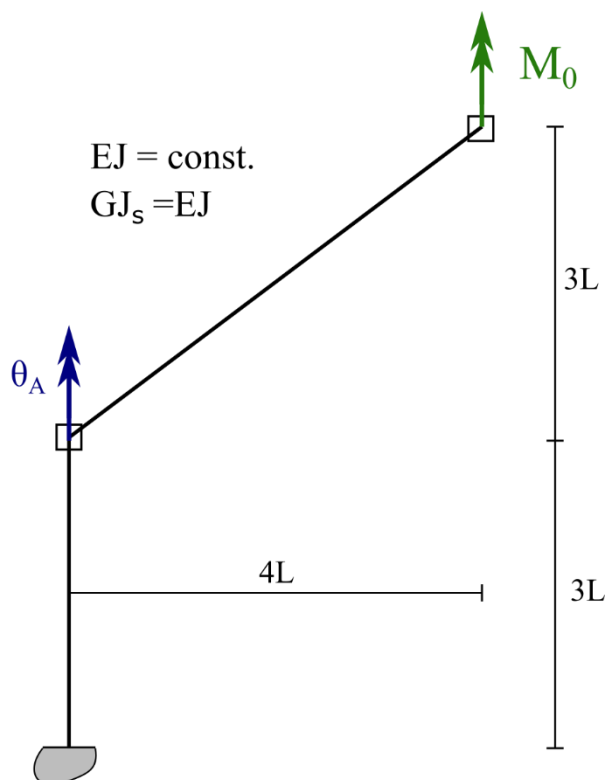
*Początek: 10.00. Do 10.50 należy opracować to zadanie a do 11.00 przesłać rozwiązanie pod TEAMS  
Na Kartce z rozwiązaniem proszę wyraźnie napisać:*

*Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu  
Mechanika Konstrukcji 3 KB została wykonana przeze mnie samodzielnie*

*Imię i nazwisko (czytelnie)*

*Nr albumu (czytelnie)*

**Zadanie 1.** Dany jest ruszt o węzłach sztywnych obciążony momentem skupionym  $M_0$ , por. rysunek.  
Znaleźć: wykres momentów zginających i skręcających oraz kąt skręcenia  $\theta_A$ .



NAZWISKO Imię		
Nr albumu		Oceny z ćwiczeń :
ocena zadania 1	ocena zadania 2	Ocena z egzaminu po ustnym
		Ocena łączna, data, podpis

Początek: 11.00. Do 11.50 należy opracować to zadanie a do 12.00 przesłać rozwiązanie pod TEAMS  
Na kartce z rozwiązaniem proszę wyraźnie napisać:

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu  
Mechanika Konstrukcji 3 KB została wykonana przeze mnie samodzielnie

Imię i nazwisko (czytelnie)

Nr albumu (czytelnie)

**Zadanie 2.** Dana jest płyta pierścieniowa wzmocniona pierścieniem podporowym obciążona jak na rysunku. Powierzchnia środkowa płyty jest przesunięta względem osi pierścienia o 0,5 d.

Sporządzić wykresy:

momentów zginających w płycie

momentu zginającego w pierścieniu

oraz znaleźć kąt skręcenia pierścienia  $\vartheta_A$ .

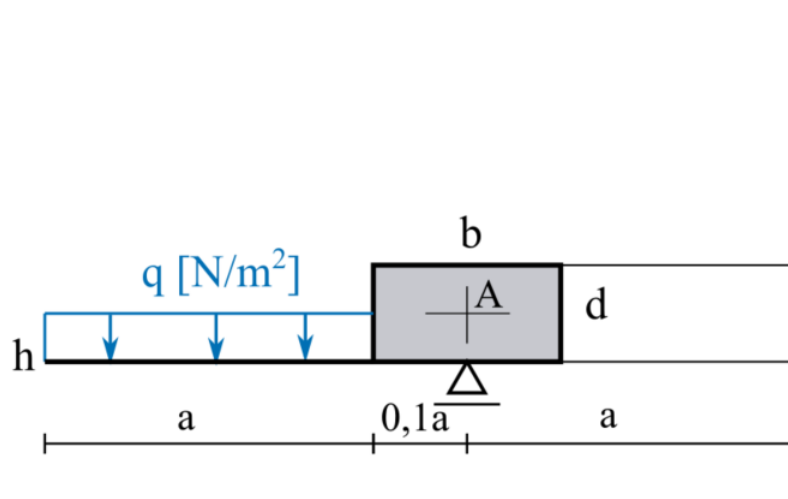
$$h = a/20$$

$$b = 0,2 a$$

$$d = 0,1 a$$

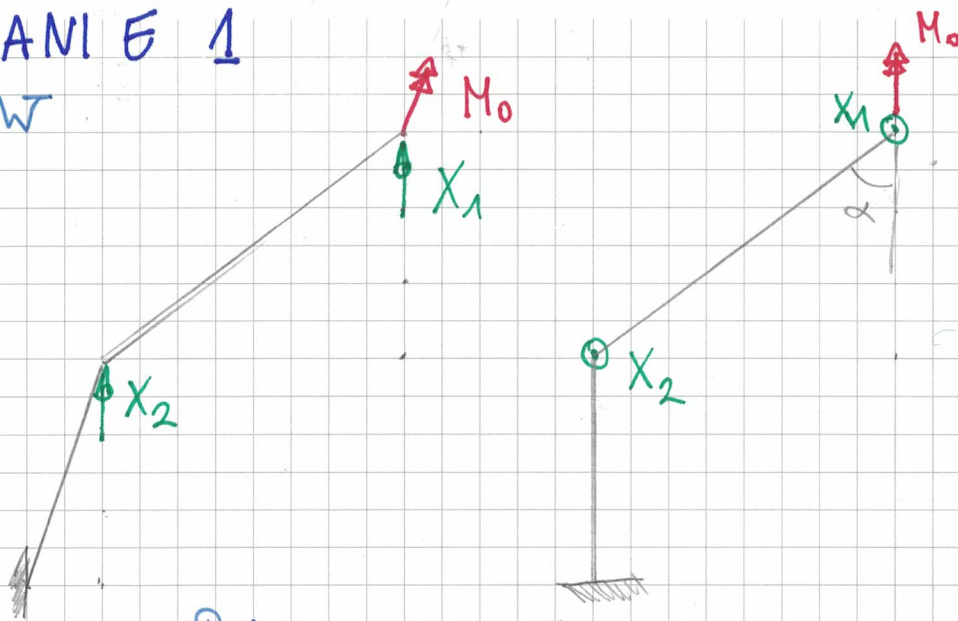
$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,2$$



# ZADANIE 1

USW



$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

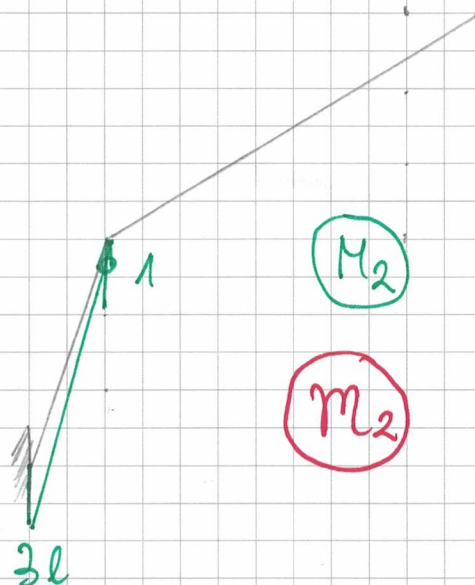
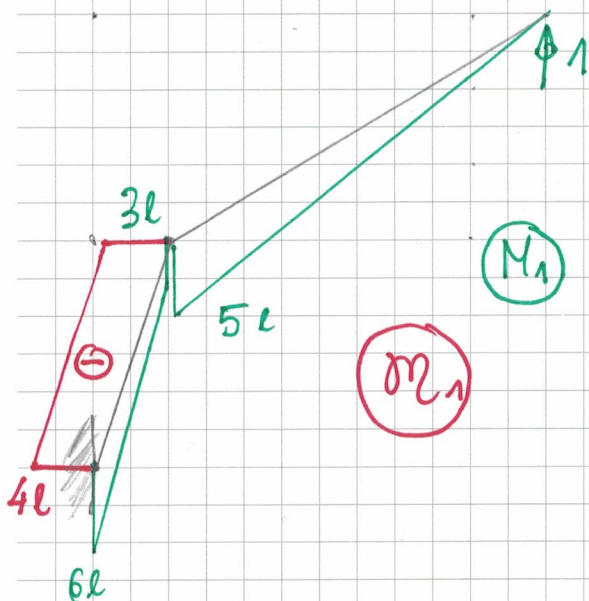
$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

Równania zgodności

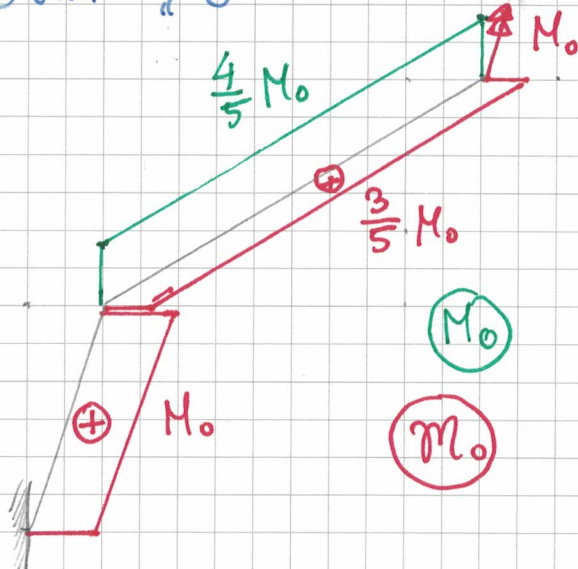
$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases}$$

Stam  $X_1 = 1$

Stam  $X_2 = 1$



Stan "0"



$$\delta_{11} = \frac{1}{E_y} \left[ \frac{1}{2} 5l \cdot 5l \cdot \frac{2}{3} 5l + \frac{1}{2} 3l \cdot 3l \left( \frac{2}{3} 3l + \frac{1}{3} 6l \right) + \frac{1}{2} 6l \cdot 3l \left( \frac{2}{3} 6l + \frac{1}{3} 3l \right) + 4l \cdot 3l \cdot 4l \right] = 152,67 \frac{l^3}{E_y}$$

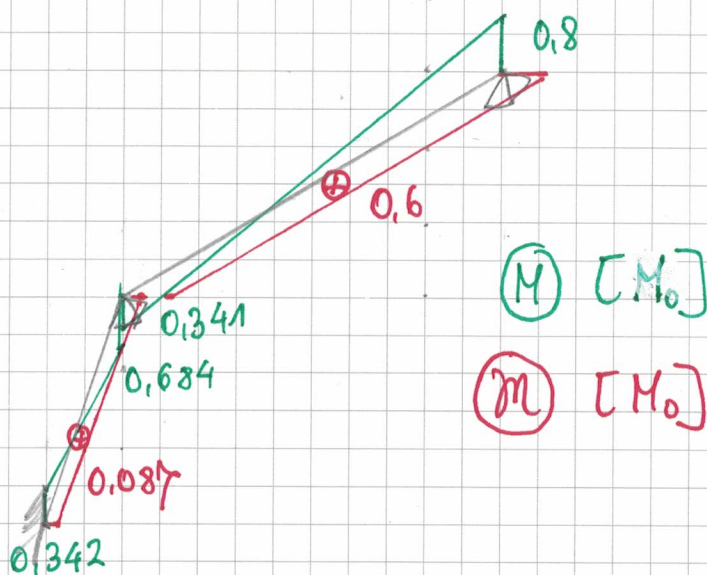
$$\delta_{12} = \frac{1}{E_y} \left[ \frac{1}{2} 3l \cdot 3l \left( \frac{2}{3} 6l + \frac{1}{3} 3l \right) \right] = 22,5 \frac{l^3}{E_y}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E_y} \left[ \frac{1}{2} 3l \cdot 3l \cdot \frac{2}{3} 3l \right] = 9 \frac{l^3}{E_y}$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{E_y} \left[ \frac{4}{5} M_0 \cdot 5l \left( -\frac{1}{2} 5l \right) + M_0 \cdot 3l \left( -4l \right) \right] = -22,5 \frac{M_0 l^2}{E_y}$$

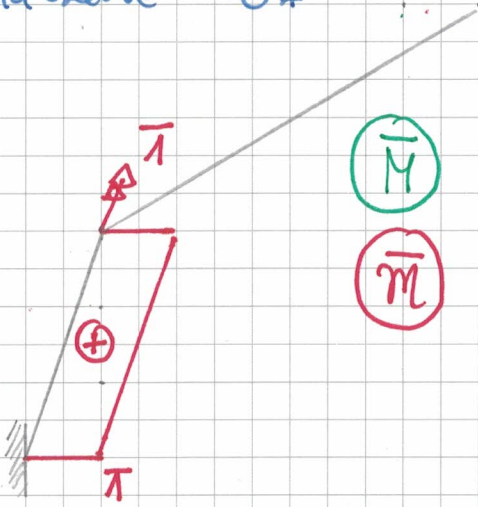
$$\delta_{20} = 0$$

r-nia zgodności  $\rightarrow X_1 = 0,228 \frac{M_0}{l} \quad X_2 = -0,570 \frac{M_0}{l}$





Wyznaczenie  $\theta_A$



$$\theta_A = \frac{1}{EI} [0,087 M_0 \cdot 3l \cdot 1] = 0,261 \frac{M_0 l}{EI}$$

## Zadanie 2

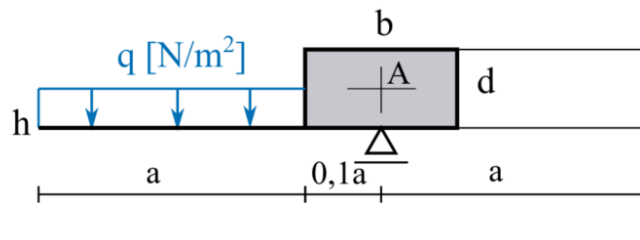
$$h = a/20$$

$$b = 0,2 a$$

$$d = 0,1 a$$

$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,2$$



$$b \rightarrow 0,2 a$$

$$d \rightarrow 0,1 a$$

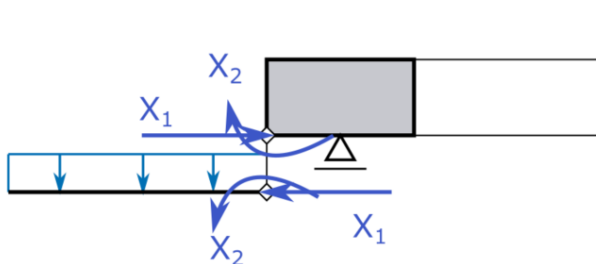
$$E \rightarrow 30\,000\,000$$

$$\nu \rightarrow 0,2$$

$$h \rightarrow \frac{a}{20}$$

$$R \rightarrow 2,1 a$$

## Schemat zastępczy



## Równania nierozdzielności

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0, \text{ gdzie:}$$

$$\delta_{11} = \delta_{11pp} + \delta_{11p}$$

$$\delta_{12} = \delta_{12p}$$

$$\delta_{22} = \delta_{22pp} + \delta_{22p}$$

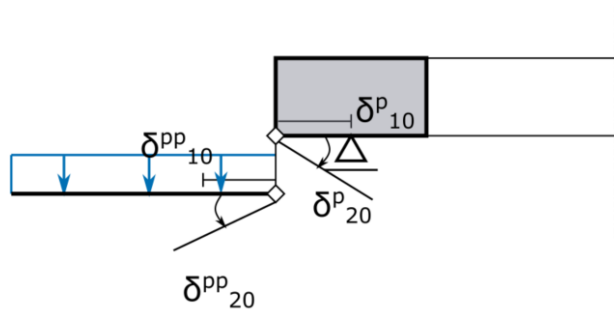
$$\delta_{10} = 0$$

$$\delta_{20} = \delta_{10pp}$$

'p' - oznacza przemieszczenia

pierścienia, 'pp' - oznacza przemieszczenia płyty pierścieniowej.

## Stan "0"



### ■ Płyta pierścieniowa

Całka ogólna równania różniczkowego ugięcia płyty ( $R$ - zewnętrzny promień płyty pierścieniowej) i zależności między ugięciem, a: kątem obrotu przekrojów, siłami wewnętrznymi.

$$w = C_4 + C_2 \rho^2 + \frac{q R^4 \rho^4}{64 D} + C_3 \text{Log}[\rho] + C_1 \rho^2 \text{Log}[\rho]$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \frac{dw}{d\rho} = \frac{\frac{C_3}{\rho} + C_1 \rho + 2 C_2 \rho + \frac{q R^4 \rho^3}{16 D} + 2 C_1 \rho \text{Log}[\rho]}{R}$$

$$M_1 = \frac{D}{R^2} \left( -\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} - \nu \frac{d^2 w}{d^2 \rho} \right) = -\frac{1}{16 R^2 \rho^2}$$

$$\left( -16 D C_3 (-1 + \nu) + 16 D (C_1 + 3 C_1 \nu + 2 C_2 (1 + \nu)) \rho^2 + q R^4 (1 + 3 \nu) \rho^4 + 32 D C_1 (1 + \nu) \rho^2 \text{Log}[\rho] \right)$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2} \left( -\frac{d^2 w}{d^2 \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) = -\frac{1}{16 R^2 \rho^2}$$

$$\left( 16 D C_3 (-1 + \nu) + 16 D (2 C_2 (1 + \nu) + C_1 (3 + \nu)) \rho^2 + q R^4 (3 + \nu) \rho^4 + 32 D C_1 (1 + \nu) \rho^2 \text{Log}[\rho] \right)$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right) = -\frac{4 D C_1}{R^3 \rho} - \frac{q R \rho}{2}$$

#### Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = 0$$

$$M_2(1) = 0$$

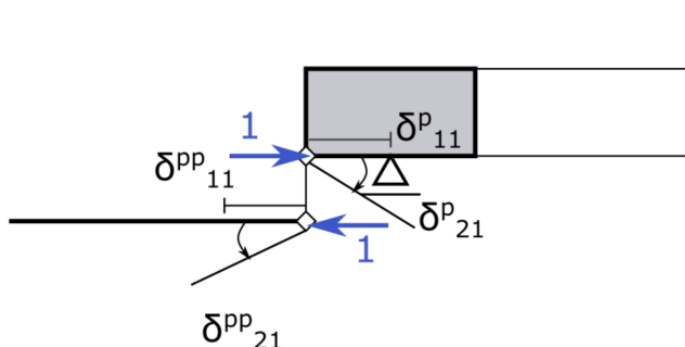
$$w\left(\frac{11}{21}\right) = 0$$

$$M_2\left(\frac{11}{21}\right) = 0$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{20 \text{ pp}} = \varphi\left(\frac{11}{21}\right) = \frac{1.55253 a^3 q}{D}$$

## Stan $X_1 = 1$



### ■ Płyta pierścieniowa

Płyta denna pracuje w stanie tarczowym. Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = \frac{B}{r} + A r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{d u}{d r} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_{rr} + \nu \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A E}{-1 + \nu} - \frac{B E}{r^2 (1 + \nu)}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A E}{-1 + \nu} + \frac{B E}{r^2 (1 + \nu)}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(1.1 a) = \frac{-1}{h_2}, \quad \sigma_{rr}(2.1a) = 0$$

$$A = -\frac{0.378125 (-1. + 1. \nu^2)}{E h (1. + \nu)}$$

$$B = \frac{1.66753 (-1. a^2 - 1. a^2 \nu + 1. a^2 \nu^2 + 1. a^2 \nu^3)}{E h (-1. + \nu) (1. + \nu)}$$

Ostatecznie.

$$u = -\frac{0.378125 r (-1. + 1. \nu^2)}{E h (1. + \nu)} + \frac{1.66753 (-1. a^2 - 1. a^2 \nu + 1. a^2 \nu^2 + 1. a^2 \nu^3)}{E h r (-1. + \nu) (1. + \nu)}$$

$$\delta_{11 pp} = u(1.1a) = \frac{43.0375}{E}$$

### ■ Pierścień

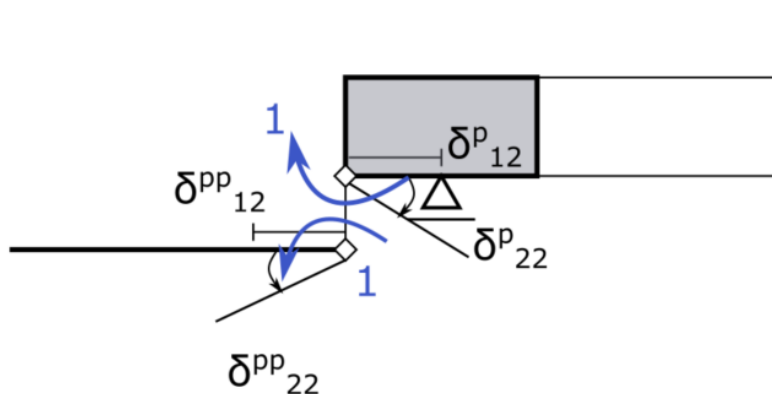
Skorzystamy z notatek ze zjazdu nr 4 lub [1]

$$\delta_{11 p} = \frac{4 a^2}{E b d}$$

$$\delta_{21 p} = -\frac{6 a^2}{E b d^2}$$



## Stan $X_2 = 1$



### ■ Płyta pierścieniowa

Warunki brzegowe.

$$Q_2(1) = 0$$

$$M_2(1) = 0$$

$$w\left(\frac{11}{21}\right) = 0$$

$$M_2\left(\frac{11}{21}\right) = 1$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22pp} = \varphi\left(\frac{11}{21}\right) = \frac{2.24154 a}{D}$$

### ■ Pierścień

Skorzystamy z notatek ze zjazdu nr 4 lub [1]

$$\delta_{12p} = -\frac{6 a^2}{E b d^2}$$

$$\delta_{22p} = \frac{12 a^2}{E b d^3}$$

## Rozwiązanie układu równań

Z przyjętych danych wynika następująca wartość współczynnika  $\lambda$  i sztywności płytowej  $D$ .

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} = 325.521 a^3$$

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy następujące wartości nadliczbowych

$$X_1 = -7.69408 a q$$

$$X_2 = -0.623316 a^2 q$$

Przyjmujemy długość  $a$  i intensywność obciążenia  $q$ .

$$a \rightarrow 1$$

$$q \rightarrow 10$$

Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości.

$$X_1 = -76.9408$$

$$X_2 = -6.23316$$

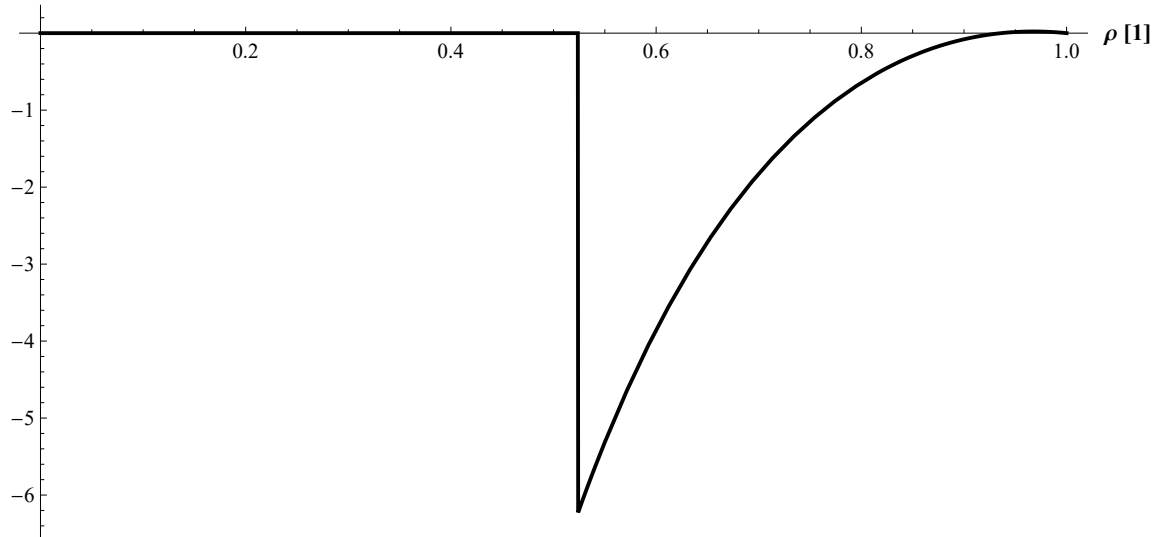
## Wykresy sił wewnętrznych

### ■ Moment radialny

$$1.29737 \times 10^{-15}$$

$$M_2 = M_2('0') + X_2 M_2(X_2)$$

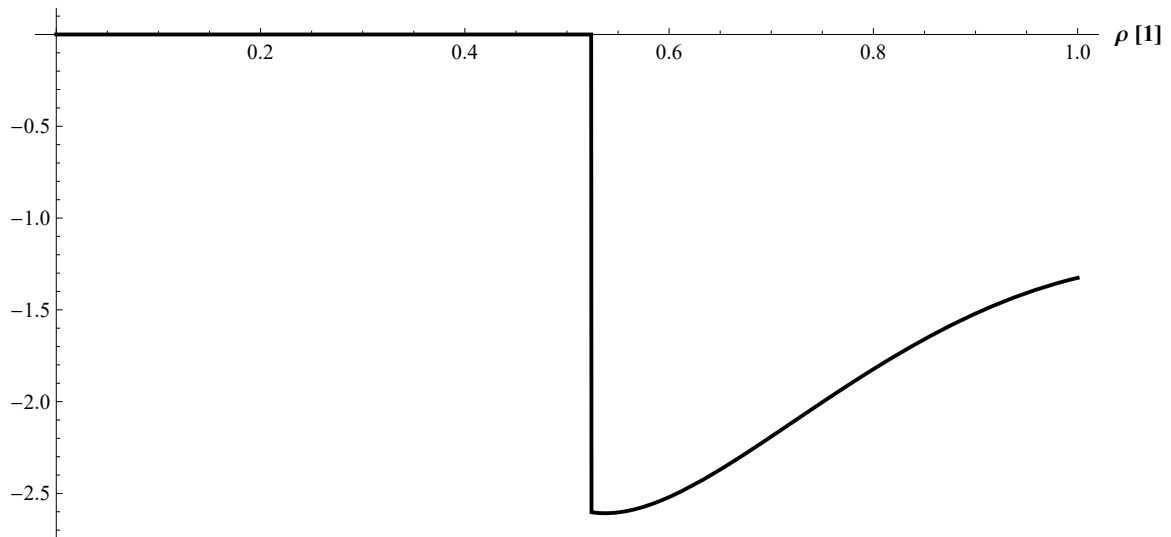
$M_2$  [kN]



### ■ Moment obwodowy

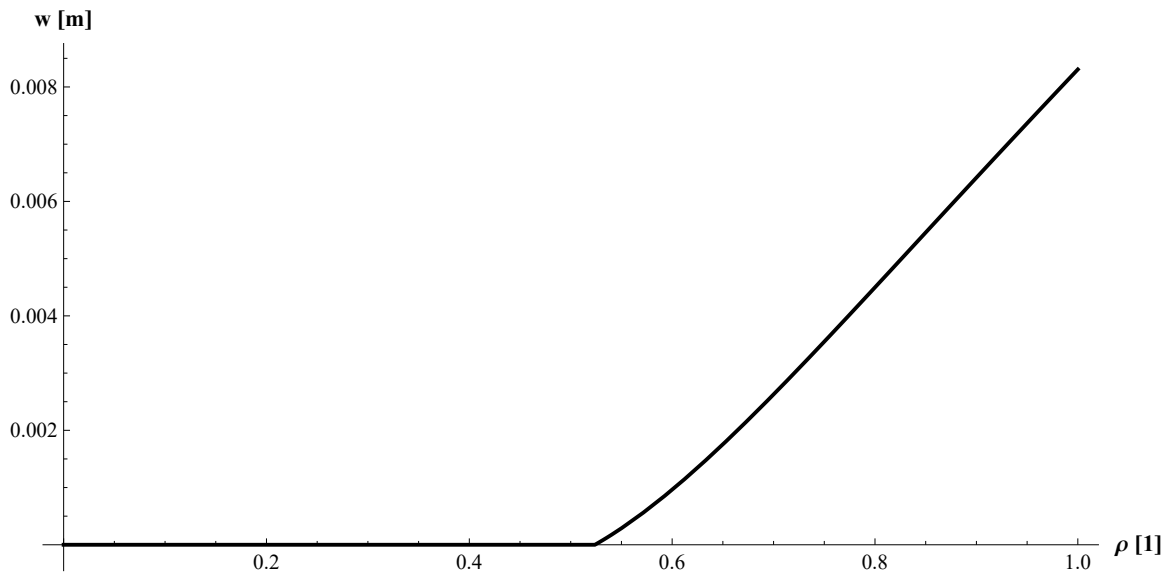
$$M_1 = M_1('0') + X_2 M_1(X_2)$$

$M_2$  [kN]



## Wykres przemieszczenia normalnego

### ■ Płyty dennej



## Moment zginający w pierścieniu

$$M_p = (X_2 - X_1 \frac{d}{2}) a = -0.238613 a^3 q$$

## Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia pierścienia z płytą

### ■ Zgodność przemieszczeń

Płyta pierścieniowa

$$\delta_{pp} = X_1 \delta_{11pp} = -0.000110378$$

Pierścień

$$\delta_p = X_1 \delta_{11p2} + X_2 \delta_{12p} = 0.000110378$$

### ■ Zgodność kątów obrotu

Płyta pierścieniowa

$$\chi_{pp} = \delta_{20pp} + X_2 \delta_{22pp} = 0.00477225$$

Pierścień

$$\chi_p = X_1 \delta_{21p} + X_2 \delta_{22p} = -0.00477225$$

## Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995