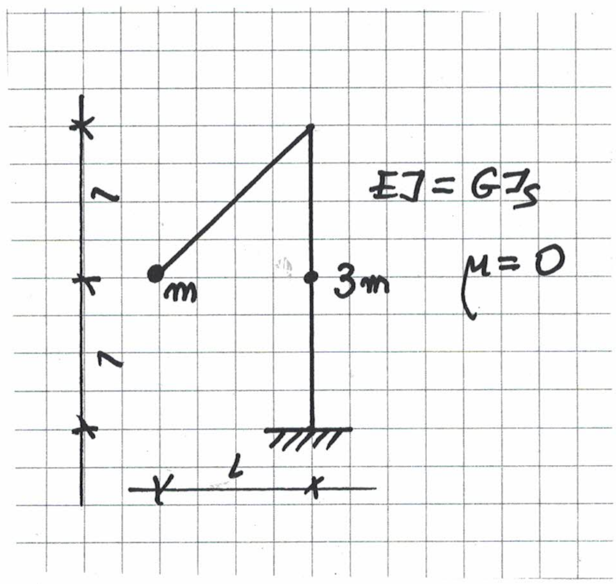
EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. Dnia 7 IX 2019 r.

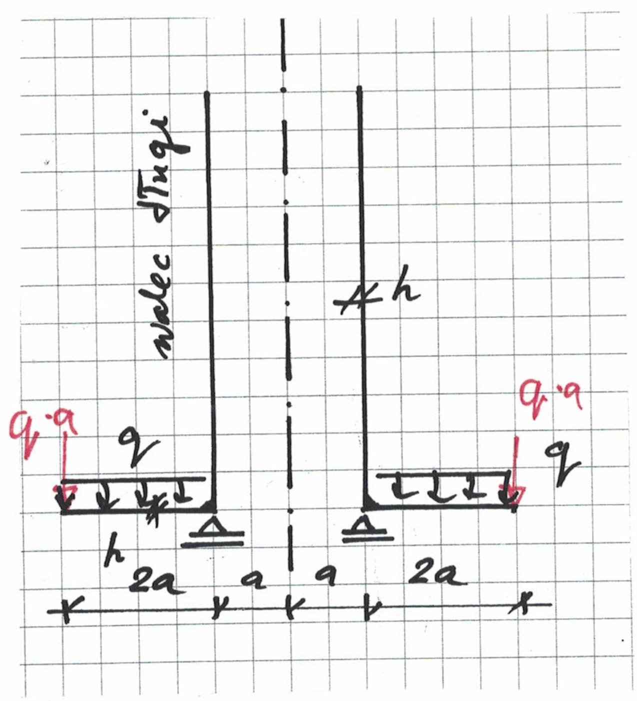
<table>
<tr><td colspan="3">NAZWISKO Imię</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">Nr albumu</td><td>Ocena z ćwiczeń projektowych</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena
zadania 1</td><td rowspan="2">ocena
zadania 2</td><td colspan="2">Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

Zadanie 1. Dany jest ruszt o węzłach sztywnych. Znaleźć częstości drgań własnych

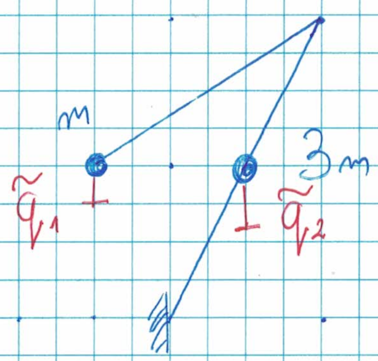


Zadanie 2.

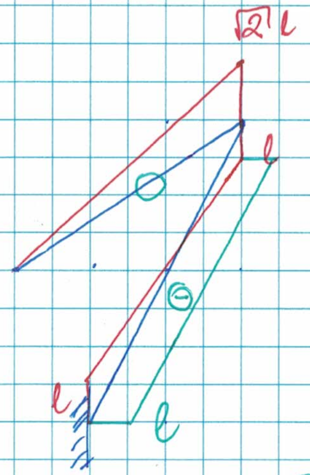
Dany jest zbiornik obciążony jak na rysunku. Omówić możliwie dokładnie kolejne kroki analizy statycznej; dany jest moduł Younga i współczynnik Poissona. Jednostka obciążenia q wynosi Pa.



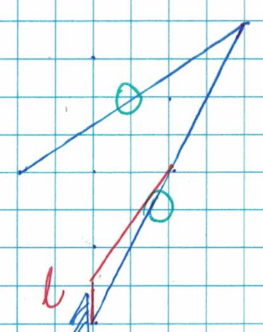
ZADANIE 1



2 stopnie swobody dynamicznej



M_1 $\mathcal{M}_1$



M_2 $\mathcal{M}_2$

Macierz podatności / sztywności

$$\mathbb{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{bmatrix} 3{,}609 & 0{,}333 \\ 0{,}333 & 0{,}333 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = \frac{EJ}{l^3}\begin{bmatrix} 0{,}305 & -0{,}305 \\ -0{,}305 & 3{,}305 \end{bmatrix}$$

Macierz mas

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}$$

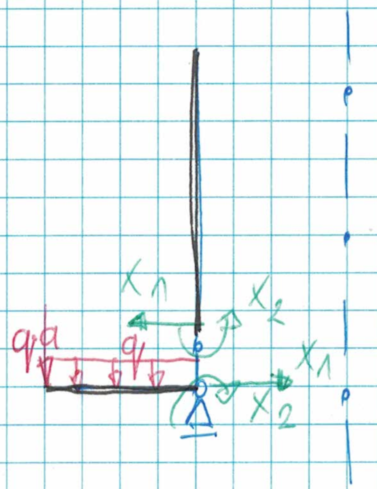
Zagadnienie własne drgań $(\mathbb{K} - \omega^2\,\mathbb{M})\,\mathbb{a} = \mathbb{0}$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = 0{,}518\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$\omega_2 = 1{,}067\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

ZADANIE 2

Układ zastępczy



Zadanie 2

Równania nierozdzielności

$\delta_{11}\ X_1 + \delta_{12}\ X_2 + \delta_{10} = 0$
$\delta_{21}\ X_1 + \delta_{22}\ X_2 + \delta_{20} = 0$, gdzie:
$\delta_{11} = \delta_{11\,w} + \delta_{11\,p}$
$\delta_{12} = \delta_{12\,w}$
$\delta_{22} = \delta_{22\,w} + \delta_{22\,p}$
$\delta_{10} = \delta_{10\,p}$
$\delta_{20} = \delta_{20\,p}$
'p' – oznacza przemieszczenia płyty, a 'w'walca.

Stan “0”

- **Płyta**

Całka ogólna równania różniczkowego ugięcia płyty (R- zewnętrzny promień płyty pierścieniowej) i zależności między ugięciem, a: kątem obrotu przekrojów, siłami wewnętrznymi.

$$w = C_4 + C_2\,\rho^2 + \frac{q\,R^4\,\rho^4}{64\,D} + C_3\,\mathrm{Log}[\rho] + C_1\,\rho^2\,\mathrm{Log}[\rho]$$

$$\varphi = \frac{1}{R}\frac{dw}{d\rho} = \frac{\frac{C_3}{\rho} + C_1\,\rho + 2\,C_2\,\rho + \frac{q\,R^4\,\rho^3}{16\,D} + 2\,C_1\,\rho\,\mathrm{Log}[\rho]}{R}$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2}\left(-\frac{d^2 w}{d^2\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho}\right) = -\frac{1}{16\,R^2\,\rho^2}$$
$$\left(16\,D\,C_3\,(-1+\nu) + 16\,D\,(2\,C_2\,(1+\nu) + C_1\,(3+\nu))\,\rho^2 + q\,R^4\,(3+\nu)\,\rho^4 + 32\,D\,C_1\,(1+\nu)\,\rho^2\,\mathrm{Log}[\rho]\right)$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dw}{d\rho}\right)\right) = -\frac{4\,D\,C_1}{R^3\,\rho} - \frac{q\,R\,\rho}{2}$$

Warunki brzegowe

$Q_2(1) = qa$
$M_2(1) = 0$
$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$
$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{20\,p} = -\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{a^3\,q\,(9.51954 + 4.51954\,\nu)}{D\,(-1. + \nu^2)}$$

Stan $X_1 = 1$

- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$\xi = \frac{y}{a}$$

$$N_1 = 2\, e^{-\lambda \xi} \lambda\, \mathrm{Cos}[\lambda \xi]$$

$$Q_2 = -e^{-\lambda \xi} (\mathrm{Cos}[\lambda \xi] - \mathrm{Sin}[\lambda \xi])$$

$$M_2 = \frac{a\, e^{-\lambda \xi} \mathrm{Sin}[\lambda \xi]}{\lambda}$$

$$M_1 = \nu\ M_2 = \frac{a\, e^{-\lambda \xi} \nu\, \mathrm{Sin}[\lambda \xi]}{\lambda}$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\chi = -\frac{2\, e^{-\lambda \xi} \lambda^2 (\mathrm{Cos}[\lambda \xi] + \mathrm{Sin}[\lambda \xi])}{E\, h}$$

$$\delta = \frac{2\, a\, e^{-\lambda \xi} \lambda\, \mathrm{Cos}[\lambda \xi]}{E\, h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{11\,w} = \frac{2\, a\, \lambda}{E\, h}$$

$$\delta_{21\,w} = -\frac{2\, \lambda^2}{E\, h}$$

- **Płyta**

Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = \frac{B}{r} + A\,r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\,\epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} - \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} + \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{1}{h_2},\quad \sigma_{rr}(3a) = 0$$

$$A = -\frac{1-\nu}{8\,E\,h}$$

$$B = -\frac{9\left(a^2 + a^2\,\nu\right)}{8\,E\,h}$$

Ostatecznie.

$$u = -\frac{r\,(1-\nu)}{8\,E\,h} - \frac{9\left(a^2 + a^2\,\nu\right)}{8\,E\,h\,r}$$

$$\delta_{11\,p} = -\,u(a) = \frac{a\,(5+4\,\nu)}{4\,EE\,h}$$

Stan $X_2 = 1$

- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$N_1 = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])}{a}$$

$$Q_2 = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda\,\mathrm{Sin}[\lambda\,\xi]}{a}$$

$$M_2 = -e^{-\lambda\,\xi}\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])$$

$$M_1 = \nu\,M_2 = e^{-\lambda\,\xi}\,\nu\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\delta = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])}{E\,h}$$

$$\chi = \frac{4\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^3\,\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi]}{E\,a\,h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{12\,w} = -\frac{2\,\lambda^2}{E\,h}$$

$$\delta_{22\,w} = \frac{4\,\lambda^3}{E\,a\,h}$$

- **Płyta**

Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = 0$$
$$M_2(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22\,p} = -\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5\,a + 4\,a\,\nu}{4\,D - 4\,D\,\nu^2}$$

Rozwiązanie układu równań

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy najstępujące siły wewnętrzne.

$$X_1 = \left(\left(4.51954\,E\,a^3\,h\,q\,\lambda^2\,(2.10631 + 1.\,\nu)\right) \Big/ \left(E\,a^2\,h\,(0.625 + \lambda + 0.5\,\nu)\,(1.25 + 1.\,\nu) + D\,\lambda^3\,\left(2.5 + \nu\,(2. + (-2.5 - 2.\,\nu)\,\nu) + \lambda\,\left(2. - 2.\,\nu^2\right)\right)\right)\right)$$

$$X_2 = \left(\left(4.51954\,E\,a^4\,h\,q\,(2.10631 + 1.\,\nu)\,(1.25 + 2.\,\lambda + 1.\,\nu)\right) \Big/ \left(E\,a^2\,h\,\left(1.\,(1.25 + 1.\,\nu)^2 + \lambda\,(2.5 + 2.\,\nu)\right) + D\,\lambda^3\,\left(5. + \nu\,(4. + (-5. - 4.\,\nu)\,\nu) + \lambda\,\left(4. - 4.\,\nu^2\right)\right)\right)\right)$$

Dalej przyjęto następujące dane liczbowe.

$$h \to 0.2$$
$$q \to 5000$$
$$E \to 30\,000\,000\,000$$
$$a \to 3$$
$$\nu \to 0.2$$

Z przyjętych danych wynikają następujące wartości sztywności płytowej i współczynnika λ.

$$D = \frac{E\,h^3}{12\,\left(1 - \nu^2\right)} = 2.08333 \times 10^7$$

$$\lambda = \left(\frac{3\,\left(1 - \nu^2\right)\,a^2}{h^2}\right)^{0.25} = 5.04538$$

Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości.

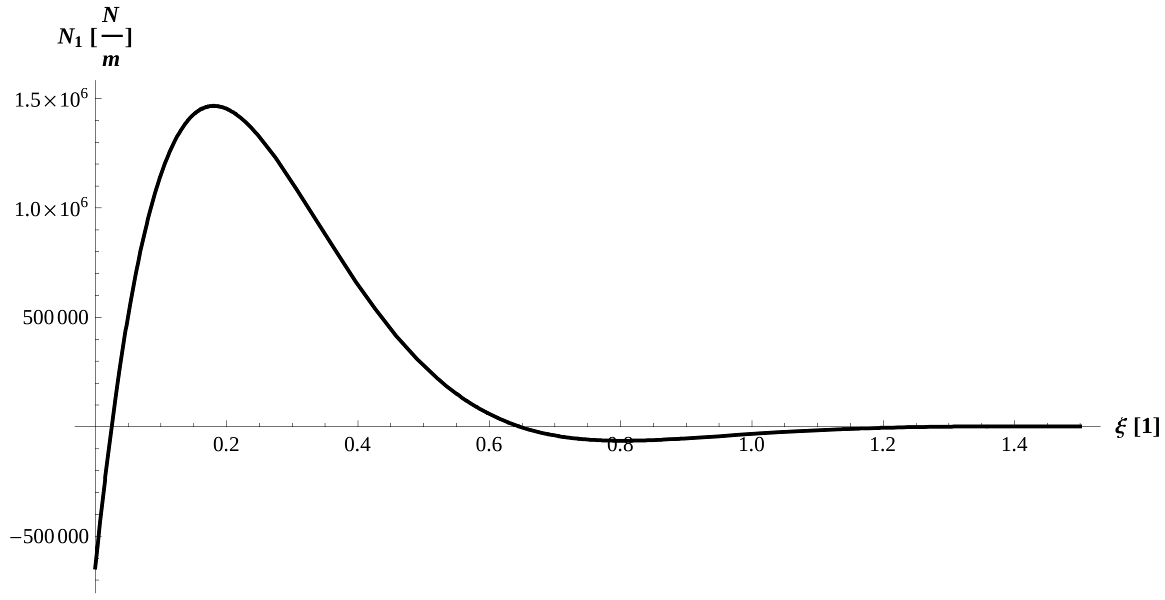
$$X_1 = 442\,968.$$
$$X_2 = 301\,238.$$

Wykresy sił wewnętrznych

- **Siła równoleżnikowa**

$N_1 = X_1\ N_1(X_1) + X_2\ N_1(X_2)$

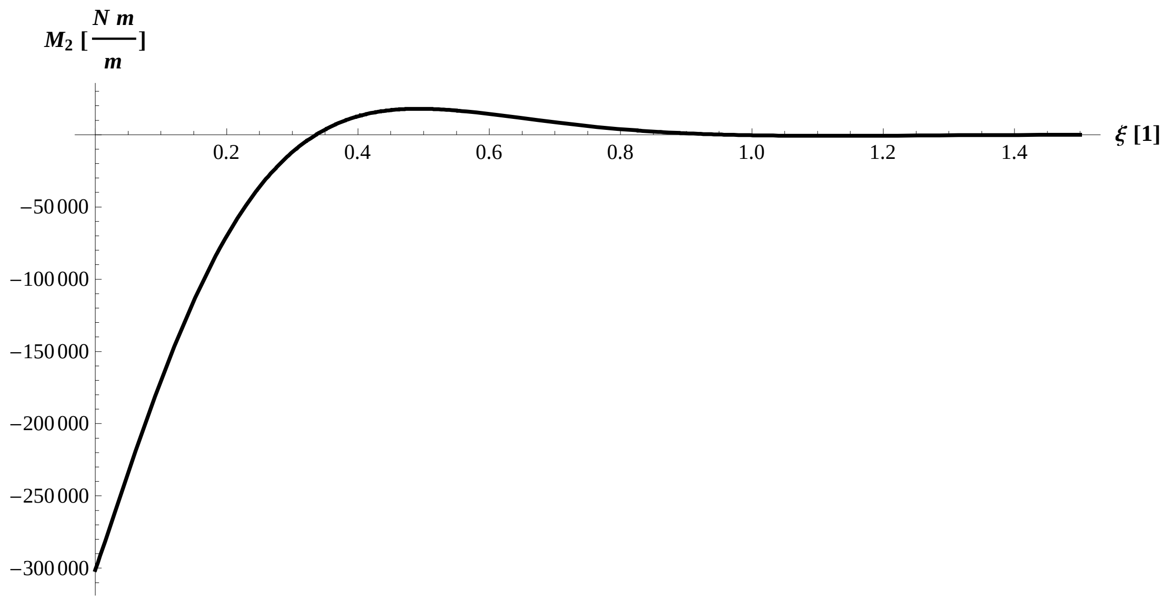
Out[91]=



- **Moment południkowy**

$M_2 = X_1\ M_2(X_1) + X_2\ M_2(X_2)$

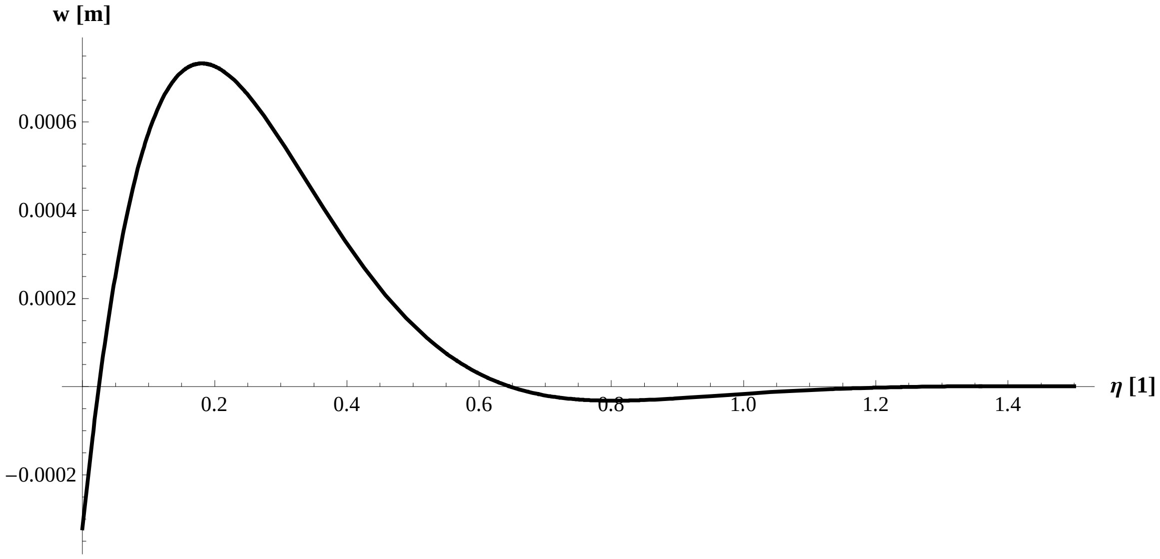
Out[96]=



Wykres przemieszczenia normalnego

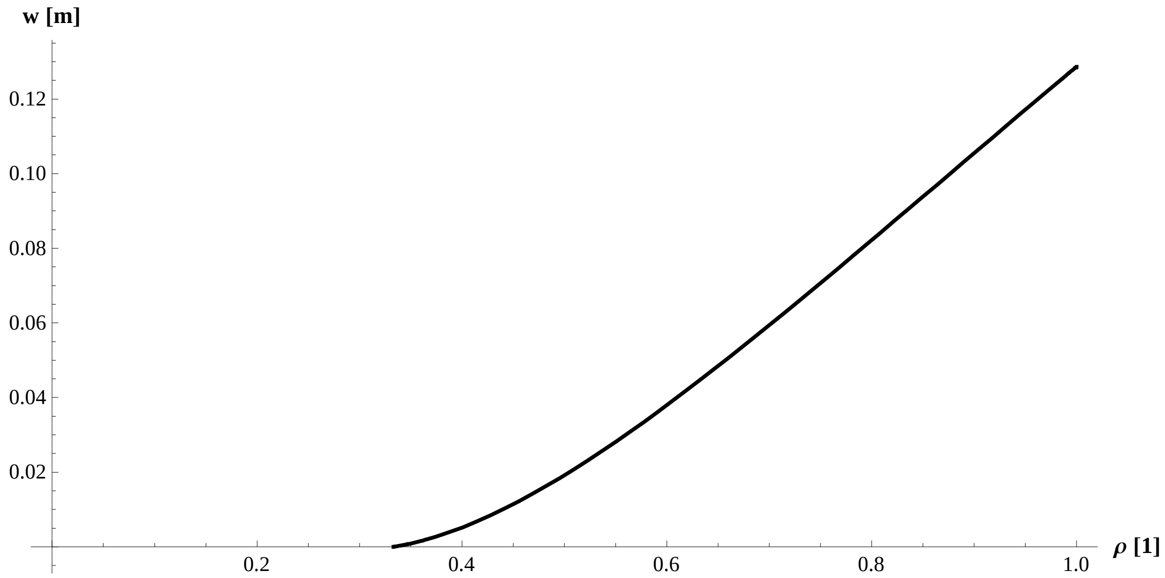
- **Walca**

Out[99]=



- **Płyty (wykres ugięcia)**

Out[119]=



Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia płyty z walcem

- **Zgodność przemieszczeń**

Walec

$\delta_s = \delta_{10\,w} + X_1\ \delta_{11\,w} + X_2\ \delta_{12} = -0.000321152$

Płyta

$\delta_p = \delta_{10\,p} + \delta_{11\,p}\ X_1 = 0.000321152$

- **Zgodność kątów obrotu**

Walec

$\chi_s = \delta_{12} X1 + \delta_{20\,s} + \delta_{22\,s} X_2 = 0.00483893$

Płyta

$\chi_p = \delta_{20\,p} + \delta_{22\,p} X_2 = -0.00483893$

UWAGA!!!
W zadaniu nie chodzi o przepisywanie wzorów z materiałów, ani doprowadzenie obliczeń do końca. Należy wykazać się: znajmością metody zaburzeń brzegowych, umiejętnością zapisywania warunków brzegowych dla płyt i tarcz kołowych oraz powłoki walcowej, umiejętnością poprawnej interpretacji “δ”.

Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995