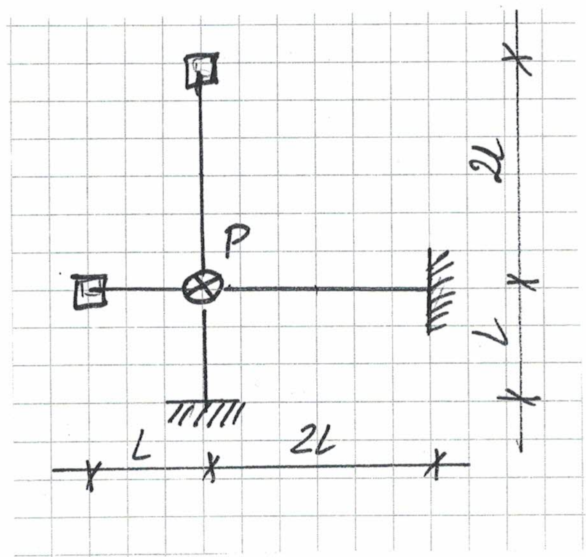
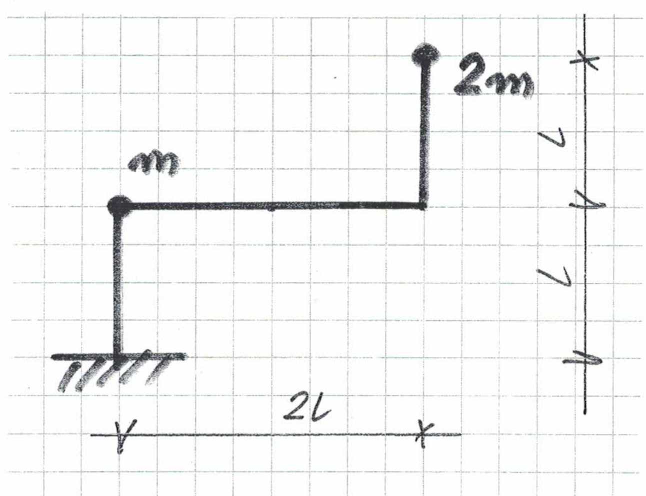
EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. dnia 11 II 2018 r.S

<table>
<tr><td colspan="3">NAZWISKO Imię</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nr albumu</td><td>Ocena z ćwiczeń projektowych</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena zadania 1</td><td rowspan="2">ocena zadania 2</td><td>Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td>Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

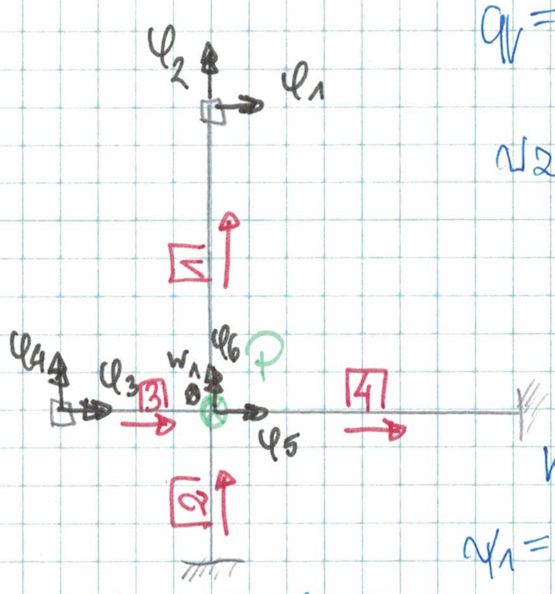
Zadanie 1. Dany jest ruszt o węzłach sztywnych. Zapisać układ równań macierzowej metody przemieszczeń Przyjąć GC=EJ.



Zadanie 2. Dany jest nieważki ruszt o węzłach sztywnych. Przyjąć GC=EJ. Masa jest skupiona w węzłach jak na rysunku. Znaleźć postacie drgań własnych i częstości drgań własnych.



Zadanie 1



Wektor niewiadomych

$$q = [\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4\ \varphi_5\ \varphi_6\ w_1]$$

Względne kąty skręcenia

$$\Theta_1 = \varphi_2 - \varphi_6 \qquad \Theta_3 = \varphi_5 - \varphi_3$$
$$\Theta_2 = \varphi_6 \qquad \Theta_4 = -\varphi_5 \qquad \Rightarrow \beta$$

Kąty obrotu cięciw

$$\psi_1 = -\frac{w_1}{2l} \qquad \psi_2 = \frac{w_1}{2l} \qquad \psi_3 = \frac{w_1}{l} \qquad \psi_4 = -\frac{w_1}{2l}$$

Lewe kąty obrotu

$$^*\chi_1 = -\varphi_5 - \psi_1 \qquad ^*\chi_2 = -\psi_2 \qquad ^*\chi_3 = \varphi_4 - \psi_4 \qquad ^*\chi_4 = \varphi_6 - \psi_4$$
$$\Rightarrow {}^*\beta$$

Prawe kąty obrotu

$$\chi_1^* = -\varphi_1 - \psi_1 \qquad \chi_2^* = -\varphi_5 - \psi_2 \qquad \chi_3^* = \varphi_6 - \psi_4 \qquad \chi_4^* = -\psi_4$$
$$\Rightarrow \beta^*$$

Wektor obciążeń węzłowych

$$Q = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ P]^T$$

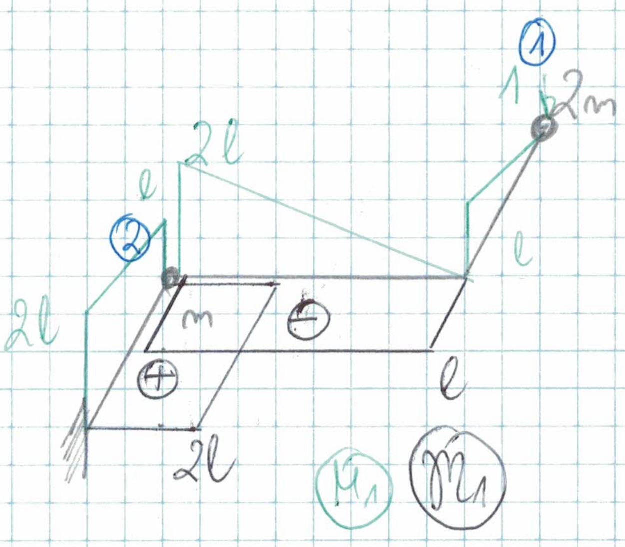
Macierze konstytutywne

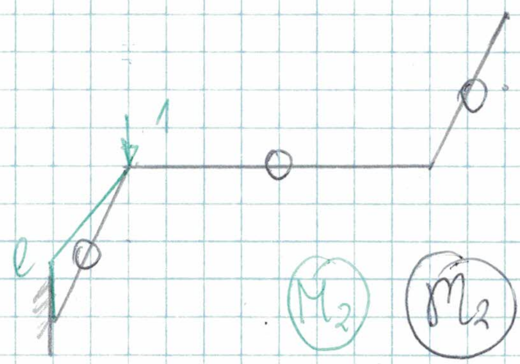
$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \frac{2EJ}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2EJ}{l} & 0 & 0 \\ & & \frac{2EJ}{l} & 0 \\ \text{sym.} & & & \frac{2EJ}{2l} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} \frac{GC}{2l} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{GC}{l} & 0 & 0 \\ & & \frac{GC}{l} & 0 \\ \text{sym.} & & & \frac{GC}{2l} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności

$$\mathbb{K} = {}^*\beta(2\mathbb{D}{}^*\beta + \mathbb{D}\beta^*) + \beta^{*T}(\mathbb{D}{}^*\beta + 2\mathbb{D}\beta^*) + \beta^T\mathbb{H}\beta$$

Zadanie 2





Macierz sztywności / podatności

$$\mathbb{D} = \left[\begin{array}{c|c} 11{,}333 & 0{,}833 \\ \hline 0{,}833 & 0{,}333 \end{array}\right] \frac{l^3}{EJ} \qquad \mathbb{K} = \left[\begin{array}{c|c} 0{,}108 & -0{,}271 \\ \hline -0{,}271 & 3{,}680 \end{array}\right] \frac{EJ}{l^3}$$

Macierz mas

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Zagadnienie drgań własnych

$$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M})\, \mathbb{a} = \mathbb{0}$$

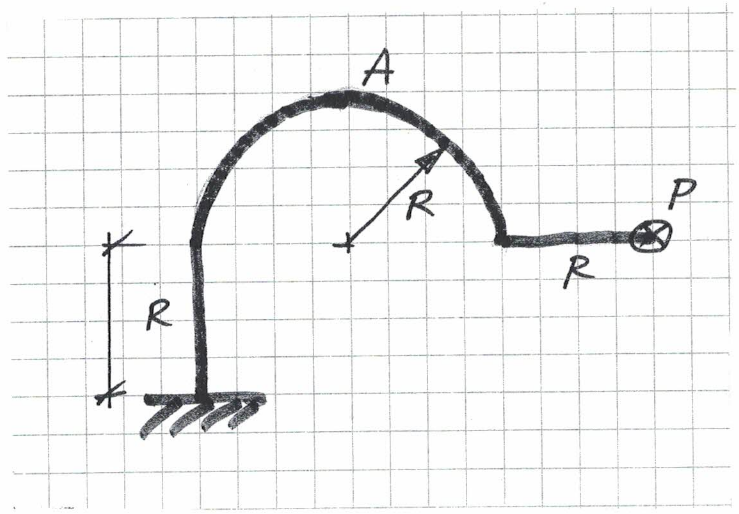
$$\omega_1 = 0{,}209 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}} \qquad \omega_2 = 1{,}921 \sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$$

$$\overset{1}{\mathbb{a}} = \begin{bmatrix} \overset{1}{a} \\ 13{,}417\, \overset{1}{a} \end{bmatrix} \qquad \overset{2}{\mathbb{a}} = \begin{bmatrix} -26{,}835\, \overset{2}{a} \\ \overset{2}{a} \end{bmatrix}$$

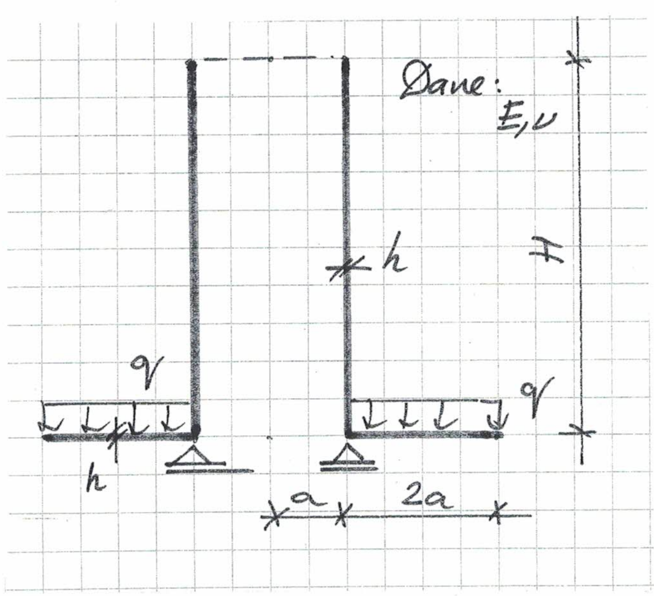
EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. N dnia 11 II 2018 r.

<table>
<tr><td colspan="3">NAZWISKO Imię</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nr albumu</td><td>Ocena z ćwiczeń projektowych</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena
zadania 1</td><td rowspan="2">ocena
zadania 2</td><td>Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td>Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

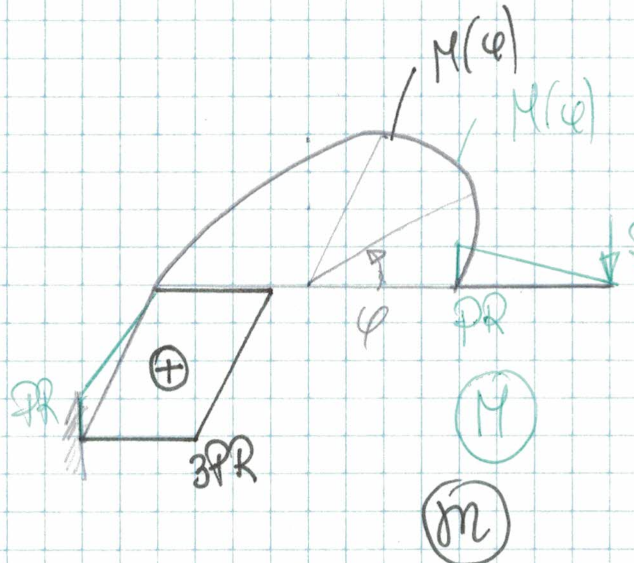
Zadanie 1. Dany jest ruszt o węzłach sztywnych. Znaleźć przemieszczenie punktu A. Przyjąć GC=EJ.

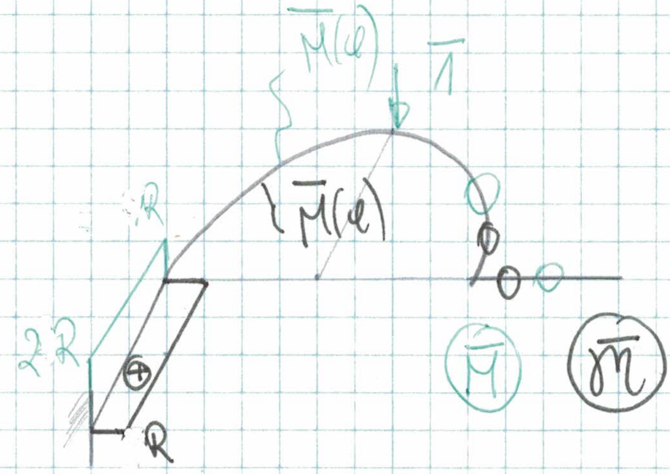


Zadanie 2. Dany jest zbiornik obciążony jak na rysunku. Omówić możliwie dokładnie kolejne kroki analizy statycznej



Zadanie 1





$$\mathfrak{M}(\varphi) = PR - 2PR\cos\varphi$$

$$M(\varphi) = -2PR\sin\varphi$$

$$\overline{\mathfrak{M}}(\varphi) = R\left(1 - \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\overline{M}(\varphi) = -R\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\delta_A = \frac{1}{EJ}\Big[\frac{1}{2}\cdot PR\cdot R\cdot\left(\frac{2}{3}2R + \frac{1}{3}R\right) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-2PR\sin\varphi)\left(-R\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)R\,d\varphi$$

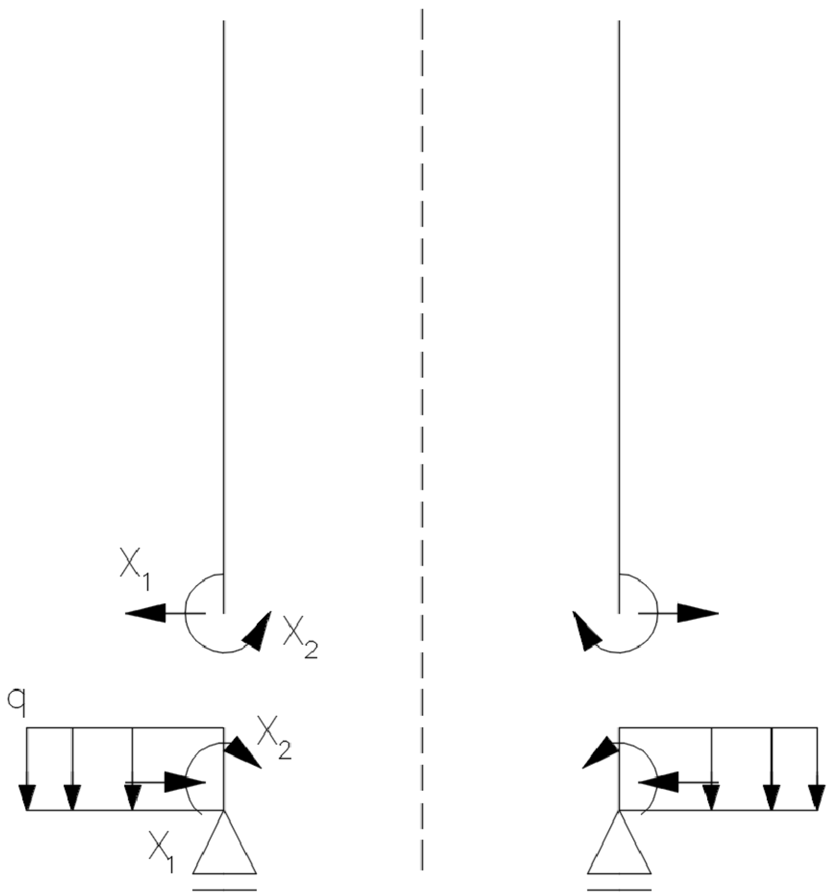
$$+\frac{1}{GC}\Big[3PR\cdot R\cdot R + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(PR - 2PR\cos\varphi)\left(R\left(1-\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)R\,d\varphi\Big] =$$

$$= 6{,}404\,\frac{PR^3}{EJ}$$

Zadanie 2

Równania nierozdzielności

$\delta_{11}\ X_1\ +\ \delta_{12}\ X_2\ +\ \delta_{10}\ =\ 0$
$\delta_{21}\ X_1\ +\ \delta_{22}\ X_2\ +\ \delta_{20}\ =\ 0$, gdzie:
$\delta_{11}\ =\ \delta_{11\,w}\ +\ \delta_{11\,p}$
$\delta_{12}\ =\ \delta_{12\,w}$
$\delta_{22}\ =\ \delta_{22\,w}\ +\ \delta_{22\,p}$
$\delta_{10}\ =\ \delta_{10\,p}$
$\delta_{20}\ =\ \delta_{20\,p}$
'p' - oznacza przemieszczenia płyty, a 'w'walca.



Stan "0"

- **Płyta**

Całka ogólna równania różniczkowego ugięcia płyty (R- zewnętrzny promień płyty pierścieniowej) i zależności między ugięciem, a: kątem obrotu przekrojów, siłami wewnętrznymi.

$$w = C_4 + C_2 \rho^2 + \frac{q R^4 \rho^4}{64 D} + C_3 \mathrm{Log}[\rho] + C_1 \rho^2 \mathrm{Log}[\rho]$$

$$\varphi = \frac{1}{R} \frac{dw}{d\rho} = \frac{\frac{C_3}{\rho} + C_1 \rho + 2 C_2 \rho + \frac{q R^4 \rho^3}{16 D} + 2 C_1 \rho \mathrm{Log}[\rho]}{R}$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2}\left(-\frac{d^2 w}{d^2 \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho}\right) =$$

$$-\frac{16 D C_3 (-1+\nu) + 16 D (2 C_2 (1+\nu) + C_1 (3+\nu)) \rho^2 + q R^4 (3+\nu) \rho^4 + 32 D C_1 (1+\nu) \rho^2 \mathrm{Log}[\rho]}{16 R^2 \rho^2}$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dw}{d\rho}\right)\right) = -\frac{4 D C_1}{R^3 \rho} - \frac{q R \rho}{2}$$

Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = 0$$
$$M_2(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{20\,p} = -\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{a^3 q (4.31172 + 2.31172 \nu)}{D (-1. + \nu)(1. + \nu)}$$

Stan $X_1 = 1$

- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$\xi = \frac{y}{a}$$
$$N_1 = 2 e^{-\lambda \xi} \lambda \mathrm{Cos}[\lambda \xi]$$
$$Q_2 = -e^{-\lambda \xi} (\mathrm{Cos}[\lambda \xi] - \mathrm{Sin}[\lambda \xi])$$
$$M_2 = \frac{a e^{-\lambda \xi} \mathrm{Sin}[\lambda \xi]}{\lambda}$$
$$M_1 = \nu M_2 = \frac{a e^{-\lambda \xi} \nu \mathrm{Sin}[\lambda \xi]}{\lambda}$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\chi = -\frac{2 e^{-\lambda \xi} \lambda^2 (\mathrm{Cos}[\lambda \xi] + \mathrm{Sin}[\lambda \xi])}{E h}$$
$$\delta = \frac{2 a e^{-\lambda \xi} \lambda \mathrm{Cos}[\lambda \xi]}{E h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{11\,w} = \frac{2 a \lambda}{E h}$$
$$\delta_{21\,w} = -\frac{2 \lambda^2}{E h}$$

■ Płyta

Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = \frac{B}{r} + A\,r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\,\epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} - \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\,\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} + \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{1}{h_2},\ \sigma_{rr}(3a) = 0$$

$$A = -\frac{1-\nu}{8\,E\,h}$$

$$B = -\frac{9\,a^2\,(1+\nu)}{8\,E\,h}$$

Ostatecznie.

$$u = -\frac{r\,(1-\nu)}{8\,E\,h} - \frac{9\,a^2\,(1+\nu)}{8\,E\,h\,r}$$

$$\delta_{11\,p} = -u(a) = \frac{a\,(5+4\,\nu)}{4\,EE\,h}$$

Stan $X_2 = 1$

■ Walec

Rozkład sił wewnętrznych.

$$N_1 = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])}{a}$$

$$Q_2 = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda\,\mathrm{Sin}[\lambda\,\xi]}{a}$$

$$M_2 = -e^{-\lambda\,\xi}\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])$$

$$M_1 = \nu\,M_2 = e^{-\lambda\,\xi}\,\nu\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\delta = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])}{E\,h}$$

$$\chi = \frac{4\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^3\,\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi]}{E\,a\,h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{12\,w} = -\frac{2\,\lambda^2}{E\,h}$$

$$\delta_{22\,w} = \frac{4\,\lambda^3}{E\,a\,h}$$

- **Płyta**

Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = 0$$
$$M_2(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22\,p} = -\,\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5\,a + 4\,a\,\nu}{4\,D - 4\,D\,\nu^2}$$

Rozwiązanie układu równań

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy najstępujące siły wewnętrzne.

$$X_1 = \frac{E^2\,h^2\left(0. + \frac{a^3\,q\,\lambda^2\,(8.62345+4.62345\,\nu)}{0.+D\,E\,h\left(-1.+\nu^2\right)}\right)}{4.\,\lambda^4 - \frac{1.\,(1.25+2.\,\lambda+1.\,\nu)\left(E\,a^2\,h\,(5.+4.\,\nu)+D\,\lambda^3\left(16.-16.\,\nu^2\right)\right)}{D\left(4.-4.\,\nu^2\right)}}$$

$$X_2 = \left(1.\,E\,a^4\,h\,q\,(1.25 + 2.\,\lambda + 1.\,\nu)\,(4.31172 + 2.31172\,\nu)\left(4. - 4.\,\nu^2\right)\right) / \Big((-1. + \nu)\,(1. + \nu)\Big(E\,a^2\,h\left(\lambda\,(-10. - 8.\,\nu) - 1.\,(2.5 + 2.\,\nu)^2\right) + D\,\lambda^3\left(-20. + \lambda\left(-16. + 16.\,\nu^2\right) + \nu\,(-16. + \nu\,(20. + 16.\,\nu))\right)\Big)\Big)$$

Dalej przyjęto następujące dane liczbowe.

$$h \to 0.2$$
$$q \to 5000$$
$$E \to 30\,000\,000\,000$$
$$a \to 3$$
$$\nu \to 0.2$$

Z przyjętych danych wynikają następujące wartości sztywności płytowej i współczynnika λ.

$$D = \frac{E\,h^3}{12\left(1 - \nu^2\right)} = 2.08333 \times 10^7$$

$$\lambda = \left(\frac{3\left(1 - \nu^2\right)a^2}{h^2}\right)^{0.25} = 5.04538$$

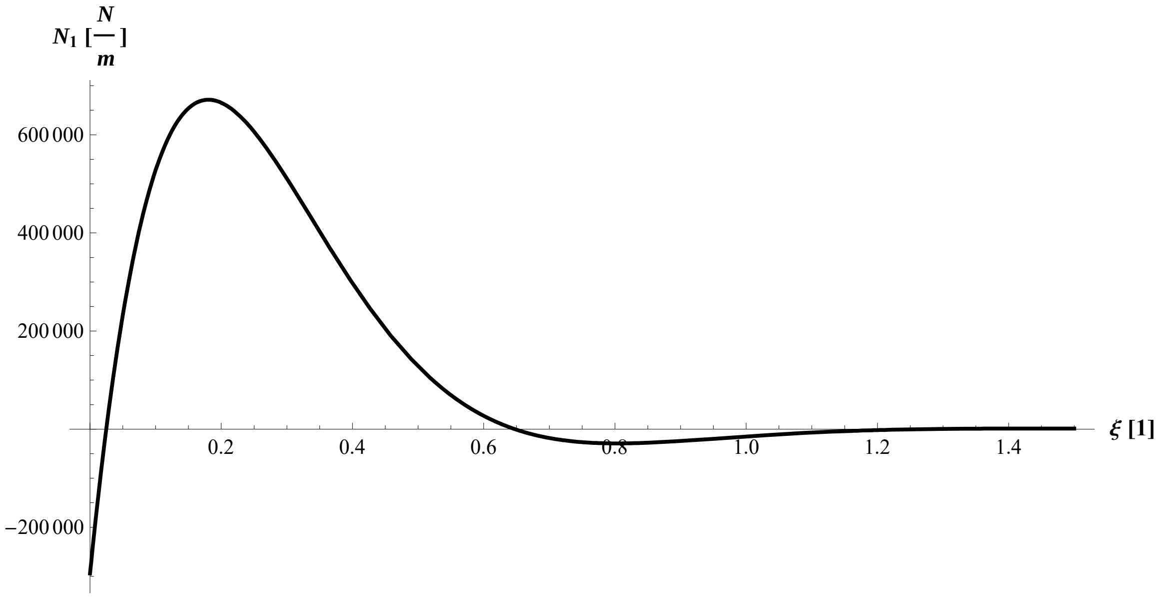
Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości.

$$X_1 = 202\,885.$$
$$X_2 = 137\,971.$$

Wykresy sił wewnętrznych

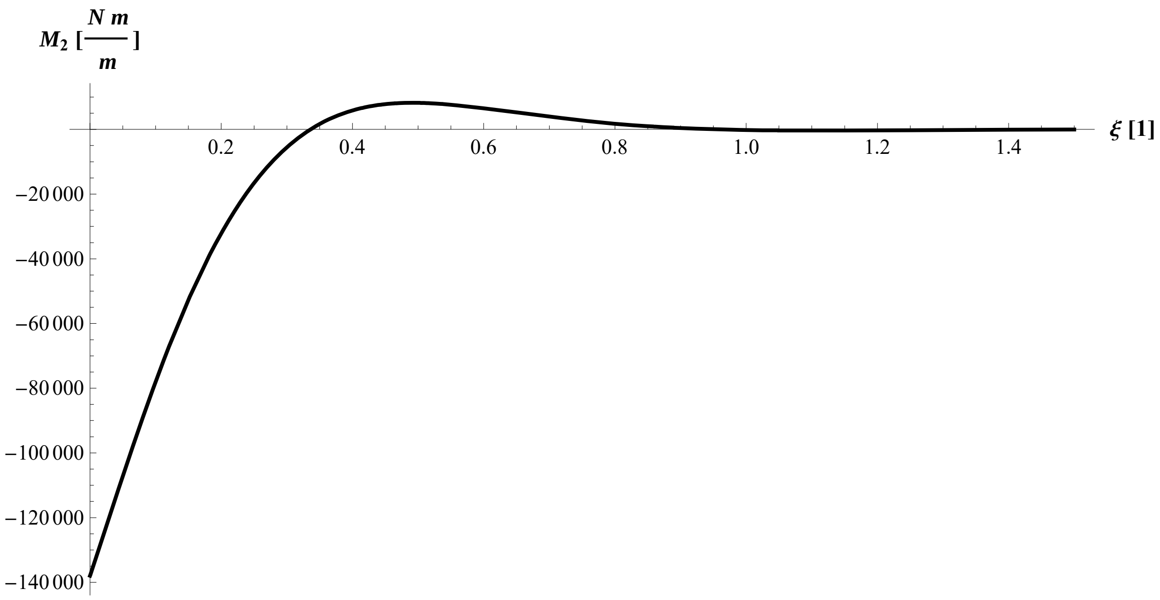
Siła równoleżnikowa

$N_1 = X_1 N_1(X_1) + X_2 N_1(X_2)$



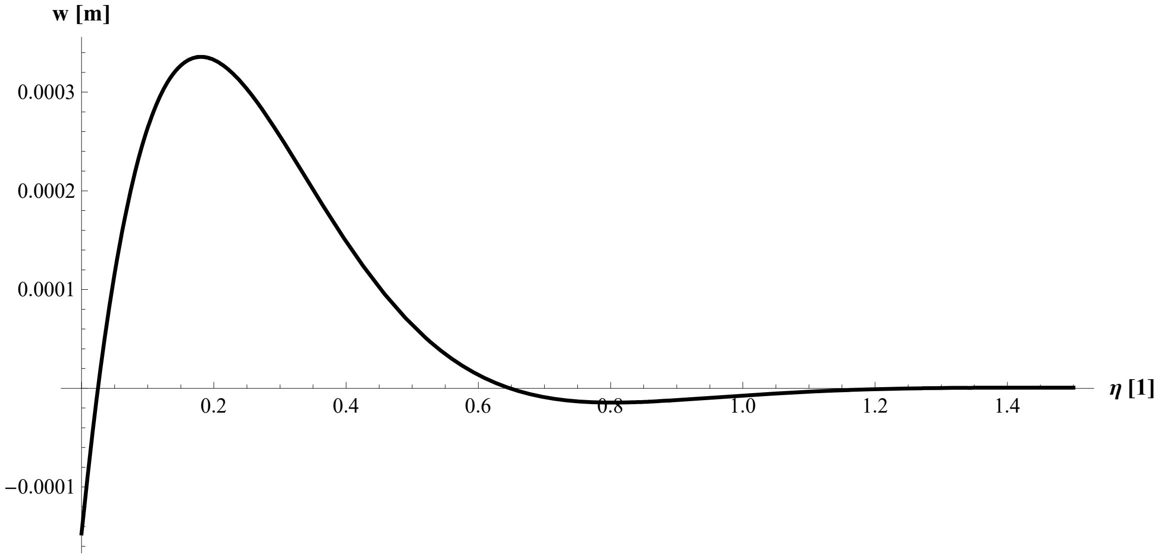
Moment południkowy

$M_2 = X_1 M_2(X_1) + X_2 M_2(X_2)$

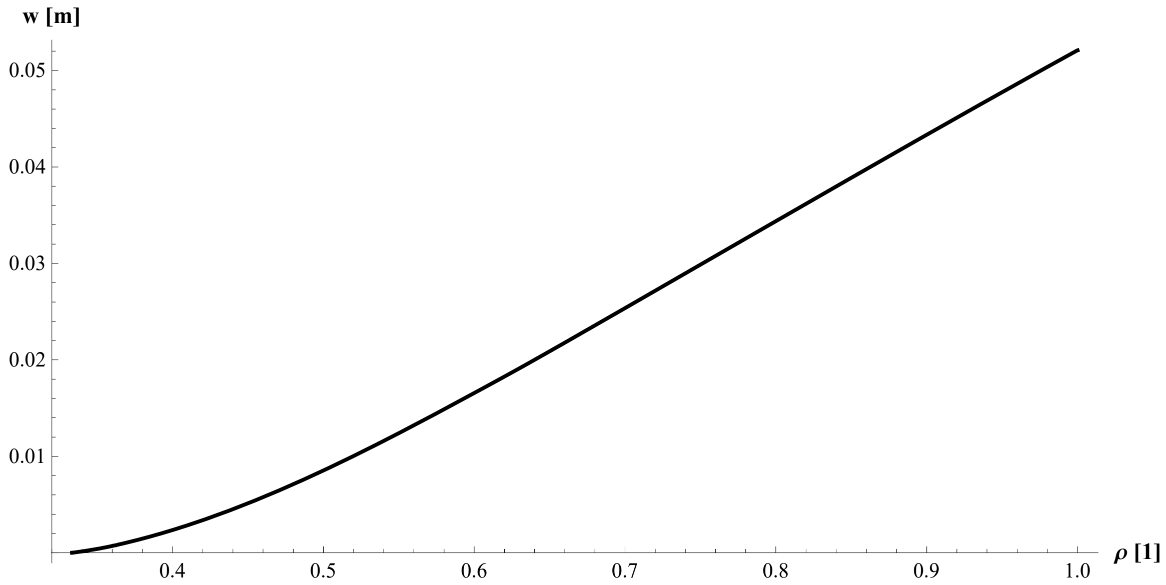


Wykres przemieszczenia normalnego

- **Walca**



- **Płyty (wykres ugięcia)**



Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia płyty z walcem

- **Zgodność przemieszczeń**

Walec

$\delta_s = \delta_{10\,w} + X_1\ \delta_{11\,w} + X_2\ \delta_{12} = -0.000147092$

Płyta

$\delta_p = \delta_{10\,p} + \delta_{11\,p}\ X_1 = 0.000147092$

- **Zgodność kątów obrotu**

Walec

$\chi_s = \delta_{12}\,X1 + \delta_{20\,s} + \delta_{22\,s}\,X_2 = 0.00221629$

Płyta

$\chi_p = \delta_{20\,p} + \delta_{22\,p}\,X_2 = -0.00221629$

UWAGA!!!
W zadaniu nie chodzi o przepisywanie wzorów z materiałów, ani doprowadzenie obliczeń do końca. Należy wykazać się: znajmością metody zaburzeń brzegowych, umiejętnością zapisywania warunków brzegowych dla płyt i tarcz kołowych oraz powłoki walcowej, umiejętnością poprawnej interpretacji “δ”.

Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995