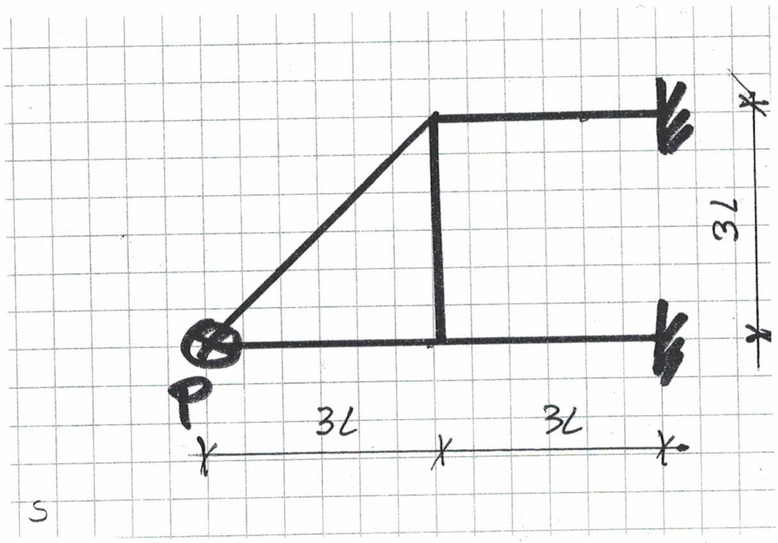
S

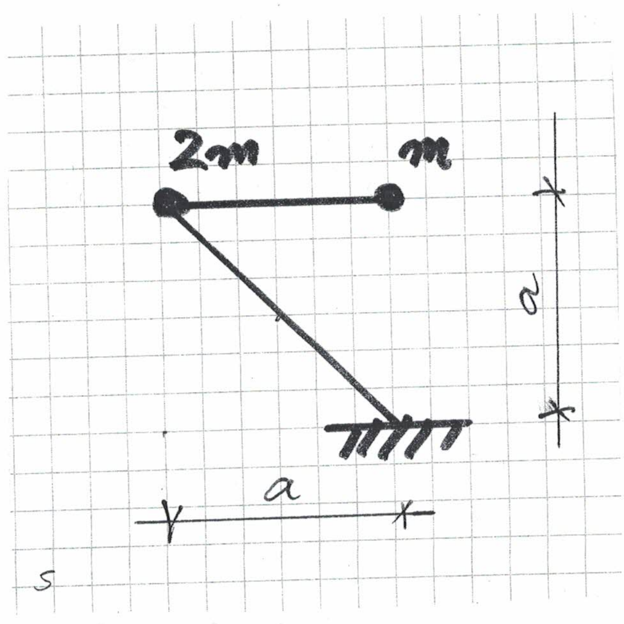
EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. dnia 17 VI 2017 r.

<table>
<tr><td colspan="3">NAZWISKO Imię</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nr albumu</td><td>Ocena z ćwiczeń projektowych</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena
zadania 1</td><td rowspan="2">ocena
zadania 2</td><td>Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td>Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

Zadanie 1. Dany jest ruszt o węzłach sztywnych. Zapisać układ równań macierzowej metody przemieszczeń Przyjąć GC=EJ.

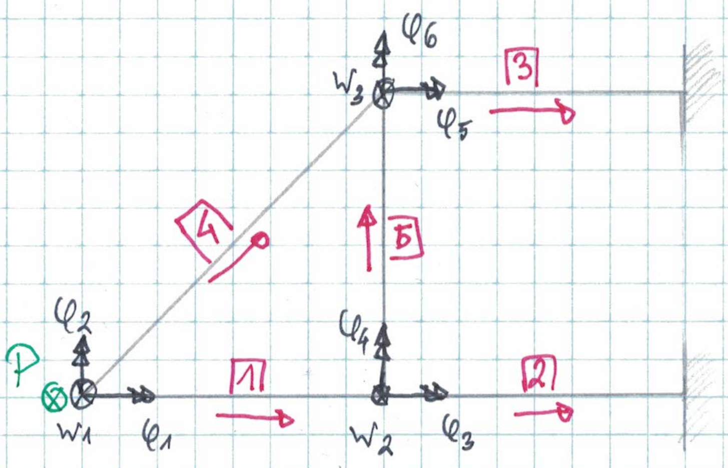


Zadanie 2. Dany jest nieważki ruszt o węzłach sztywnych. Przyjąć GC=EJ. Masa jest skupiona w węzłach jak na rysunku. Znaleźć postacie drgań własnych i częstości drgań własnych.



Zadanie 1

Wektor niewiadomych



$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_5 \\ \varphi_6 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Względne kąty skręcenia Θ_i

$\Theta_1 = \varphi_3 - \varphi_1$ $\qquad \Theta_2 = -\varphi_3$ $\qquad \Theta_3 = -\varphi_5$

$\Theta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_6 + \varphi_5) - \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ $\qquad \Theta_5 = \varphi_6 - \varphi_4$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kąty obrotu cięciw ψ_i

$\psi_1 = \frac{w_2 - w_1}{3l}$ $\qquad \psi_2 = \frac{-w_2}{3l}$ $\qquad \psi_3 = \frac{-w_3}{3l}$ $\qquad \psi_4 = \frac{w_3 - w_1}{3\sqrt{2}l}$

$\psi_5 = \frac{w_3 - w_2}{3l}$

Lewe kąty obrotu przekroju $^*\chi_i$

$^*\chi_1 = \varphi_2 - \psi_1$ $\qquad ^*\chi_2 = \varphi_4 - \psi_2$ $\qquad ^*\chi_3 = \varphi_6 - \psi_3$

$^*\chi_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) - \psi_4$ $\qquad ^*\chi_5 = -\varphi_3 - \psi_5$

Prawe kąty obrotu przekroju χ^*_i

$$\chi^*_1 = \varphi_4 - \psi_1 \qquad \chi^*_2 = -\psi_2 \qquad \chi^*_3 = -\psi_3$$

$$\chi^*_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi_6 - \varphi_5) - \psi_4 \qquad \chi^*_5 = -\varphi_5 - \psi_5$$

$$^*\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} & -\frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{3\sqrt{2}l} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{2}l} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} & -\frac{1}{3l} \end{bmatrix}$$

Układ równań MMP

$$\mathbb{K}\, q = Q$$

$$q = \mathbb{K}^{-1} Q$$

$$\mathbb{B}^* = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & 1 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} & -\frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{1}{3\sqrt{2}l} & 0 & -\frac{1}{3\sqrt{2}l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +\frac{1}{3l} & -\frac{1}{3l} \end{bmatrix}$$

Wektor obciążeń węzłowych

$$Q = [0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; P \; 0 \; 0]^T$$

Macierze konstytutywne

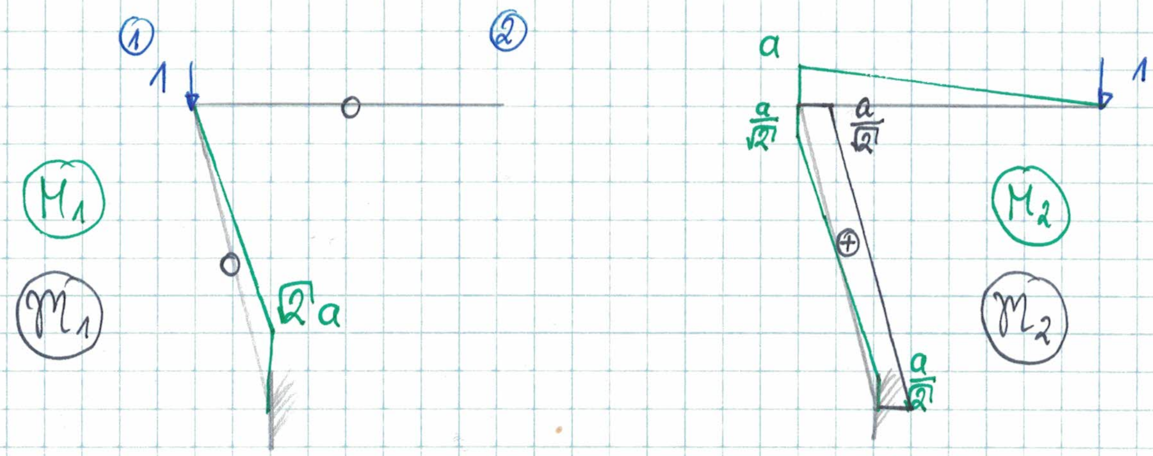
$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \frac{2EJ}{3l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2EJ}{3l} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{2EJ}{3l} & 0 & 0 \\ & & & \frac{2EJ}{3\sqrt{2}l} & 0 \\ & \text{sym.} & & & \frac{2EJ}{3l} \end{bmatrix} \qquad \mathbb{H} = \begin{bmatrix} \frac{GC}{3l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{GC}{3l} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{GC}{3l} & 0 & 0 \\ & & & \frac{GC}{3\sqrt{2}l} & 0 \\ \text{sym.} & & & & \frac{GC}{3l} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności

$$\mathbb{K} = {}^*\mathbb{B}^T (2\,\mathbb{D}\,{}^*\mathbb{B} + \mathbb{D}\,\mathbb{B}^*) + \mathbb{B}^{*T}(\mathbb{D}\,{}^*\mathbb{B} + 2\,\mathbb{D}\,\mathbb{B}^*) + \mathbb{B}^T \mathbb{H}\, \mathbb{B}$$

Zadanie 2

Macierz podatności / sztywności i mas



$$d_{11} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{a^3}{EJ} \qquad d_{12} = d_{21} = \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{a^3}{EJ} \qquad d_{22} = \frac{1}{6}(2+5\sqrt{2})\frac{a^3}{EJ}$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,104 & -0,172 \\ -0,172 & 0,688 \end{bmatrix}\frac{EJ}{a^3} \qquad \mathbb{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M})\,\mathbb{a} = 0$ – zagadnienie własne drgań

$$\det(\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}) = 0 \qquad x = \frac{m a^3 \omega^2}{EJ}$$

$$x_1 = 0,325 \qquad x_2 = 1,123$$

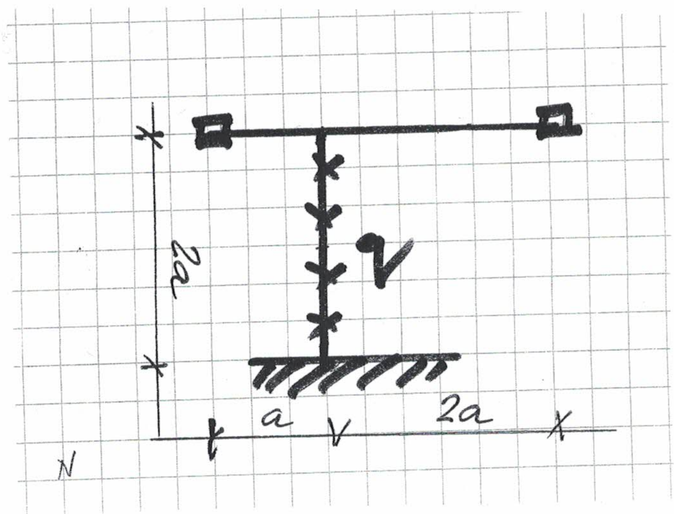
$$\omega_1 = 0,570\sqrt{\frac{EJ}{ma^3}} \qquad \omega_2 = 1,060\sqrt{\frac{EJ}{ma^3}}$$

$$\overset{1}{\mathbb{a}} = \begin{bmatrix} \overset{1}{a}_1 \\ 4,520\,\overset{1}{a}_1 \end{bmatrix} \qquad \overset{2}{\mathbb{a}} = \begin{bmatrix} \overset{2}{a}_1 \\ -0,111\,\overset{2}{a}_1 \end{bmatrix}$$

EGZAMIN Mechanika Konstrukcji (MK3) KB studia mgr niestacj. N dnia 17 VI 2017 r.

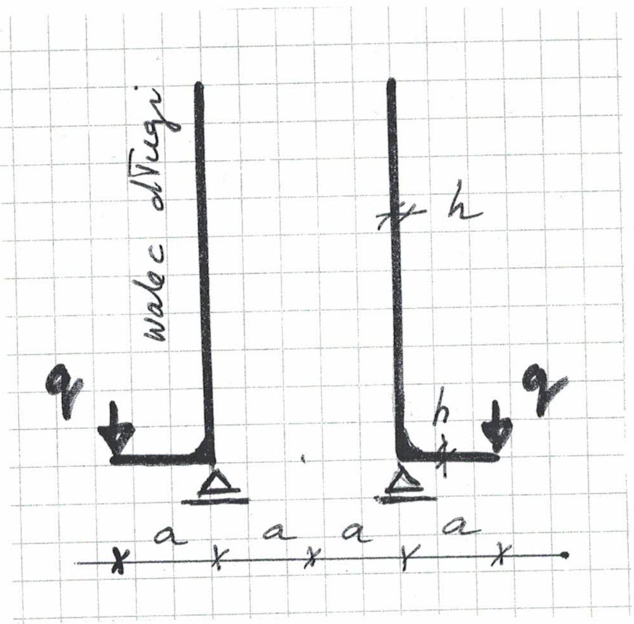
<table>
<tr><td colspan="3">NAZWISKO Imię</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nr albumu</td><td>Ocena z ćwiczeń projektowych</td></tr>
<tr><td rowspan="2">ocena
zadania 1</td><td rowspan="2">ocena
zadania 2</td><td>Ocena z egzaminu po ustnym</td></tr>
<tr><td>Ocena łączna, data, podpis</td></tr>
</table>

Zadanie 1. Dany jest ruszt o węzłach sztywnych. Znaleźć rozkłady momentów zginających i skręcających metodą sił. Przyjąć GC=EJ.



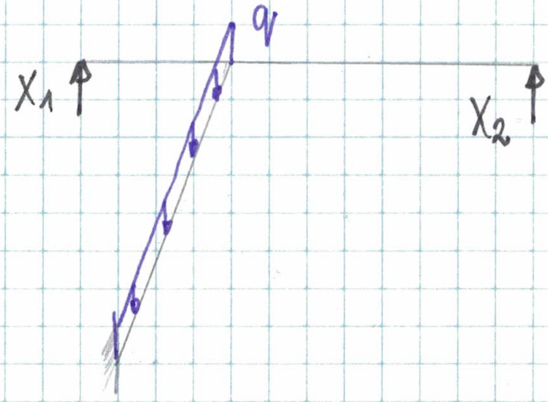
Zadanie 2. Dany jest zbiornik obciążony jak na rysunku. Omówić możliwie dokładnie kolejne kroki analizy statycznej

Dane: E, ν

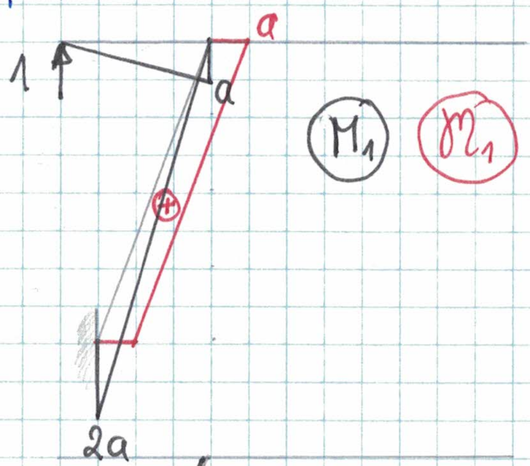


Zadanie 1

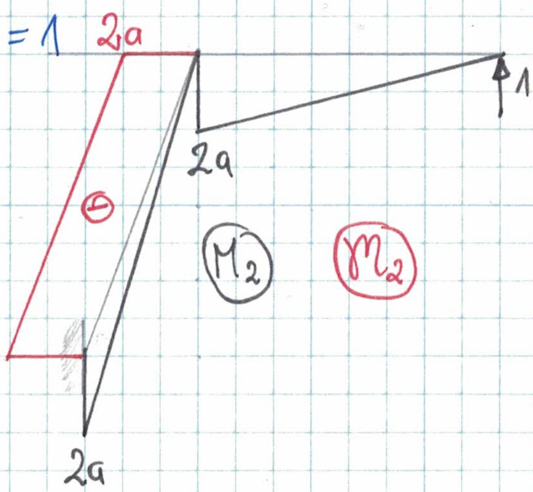
Układ statycznie wyznaczalny

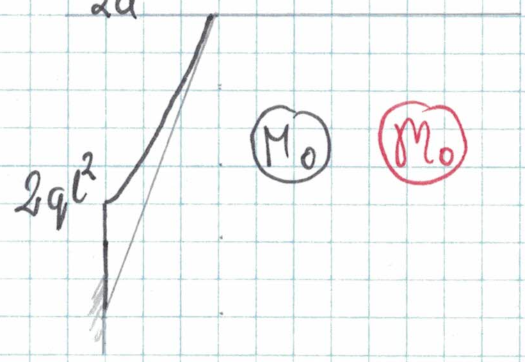


$X_1 = 1$



$X_2 = 1$

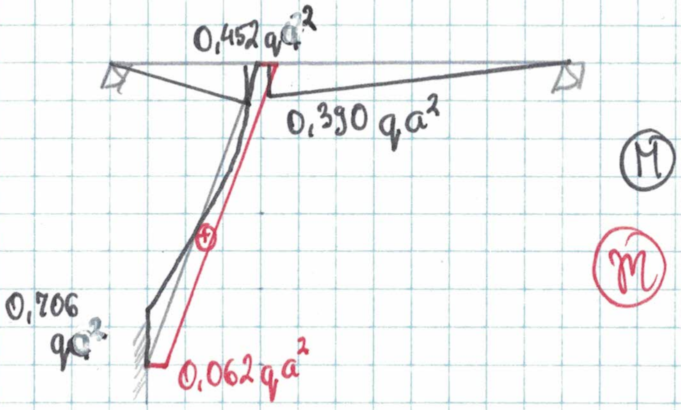




$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0 \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_1 = 0{,}452\, ql \quad X_2 = -0{,}195\, ql$$

$$\delta_{11} = 5 \frac{a^3}{EJ} \qquad \delta_{12} = -\frac{4}{3} \frac{a^3}{EJ} = \delta_{21}$$

$$\delta_{22} = \frac{40}{3} \frac{a^3}{EJ} \qquad \delta_{10} = -2 \frac{qa^4}{EJ} = \delta_{20}$$



Zadanie 2

Równania nierozdzielności

$\delta_{11}\ X_1 + \delta_{12}\ X_2 + \delta_{10} = 0$

$\delta_{21}\ X_1 + \delta_{22}\ X_2 + \delta_{20} = 0$, gdzie:

$\delta_{11} = \delta_{11\,w} + \delta_{11\,p}$

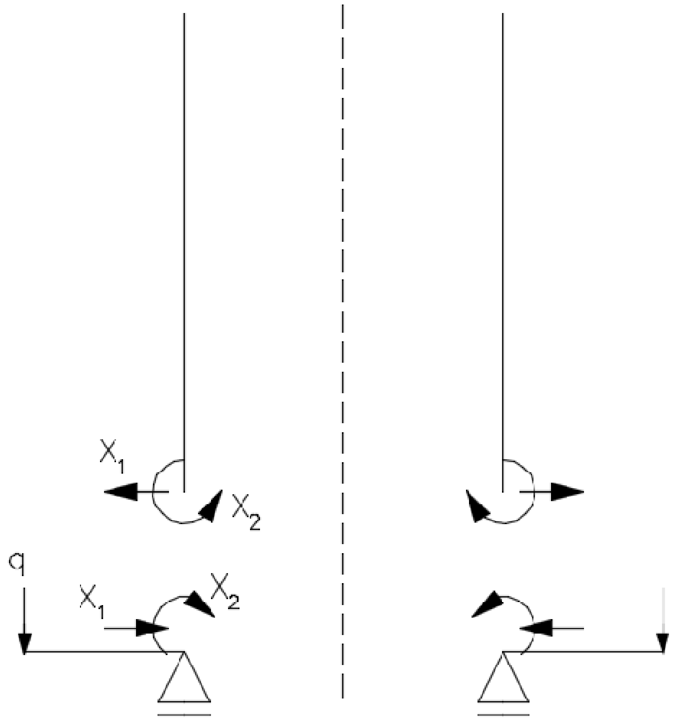
$\delta_{12} = \delta_{12\,w}$

$\delta_{22} = \delta_{22\,w} + \delta_{22\,p}$

$\delta_{10} = \delta_{10\,p}$

$\delta_{20} = \delta_{20\,p}$

'p' – oznacza przemieszczenia płyty, a 'w'walca.



Stan "0"

- **Płyta**

Całka ogólna równania różniczkowego ugięcia płyty (R- zewnętrzny promień płyty pierścieniowej) i zależności między ugięciem, a: kątem obrotu przekrojów, siłami wewnętrznymi.

$$w = C_4 + C_2\,\rho^2 + C_3\,\text{Log}[\rho] + C_1\,\rho^2\,\text{Log}[\rho]$$

$$\varphi = \frac{1}{R}\frac{dw}{d\rho} = \frac{\frac{C_3}{\rho} + C_1\,\rho + 2\,C_2\,\rho + 2\,C_1\,\rho\,\text{Log}[\rho]}{R}$$

$$M_2 = \frac{D}{R^2}\left(-\frac{d^2 w}{d^2\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho}\right) =$$

$$-\frac{1}{R^2\,\rho^2} D\left(C_3\,(-1+\nu) + (2\,C_2\,(1+\nu) + C_1\,(3+\nu))\,\rho^2 + 2\,C_1\,(1+\nu)\,\rho^2\,\text{Log}[\rho]\right)$$

$$Q_2 = -\frac{D}{R^3}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dw}{d\rho}\right)\right) = -\frac{4\,D\,C_1}{R^3\,\rho}$$

Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = q$$
$$M_2(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{20\,p} = -\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2\,q\,(2.84839 + 0.848392\,\nu)}{0. + D\left(-1. + \nu^2\right)}$$

Stan $X_1 = 1$

- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$\xi = \frac{y}{a}$$
$$N_1 = 2\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda\,\text{Cos}[\lambda\xi]$$
$$Q_2 = -e^{-\lambda\xi}\,(\text{Cos}[\lambda\xi] - \text{Sin}[\lambda\xi])$$
$$M_2 = \frac{a\,e^{-\lambda\xi}\,\text{Sin}[\lambda\xi]}{\lambda}$$
$$M_1 = \nu\,M_2 = \frac{a\,e^{-\lambda\xi}\,\nu\,\text{Sin}[\lambda\xi]}{\lambda}$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\chi = -\frac{2\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda^2\,(\text{Cos}[\lambda\xi] + \text{Sin}[\lambda\xi])}{E\,h}$$
$$\delta = \frac{2\,a\,e^{-\lambda\xi}\,\lambda\,\text{Cos}[\lambda\xi]}{E\,h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{11\,w} = \frac{2\,a\,\lambda}{E\,h}$$
$$\delta_{21\,w} = -\frac{2\,\lambda^2}{E\,h}$$

- **Płyta**

Skorzystamy z rozwiązania tarczy kołowej w PSN znanego z Teorii Sprężystości.

$$u = \frac{B}{r} + A\,r$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$$

$$\epsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\,\epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} - \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{rr} + \nu\,\epsilon_{\varphi\varphi}) = -\frac{A\,E}{-1+\nu} + \frac{B\,E}{r^2\,(1+\nu)}$$

Uwzględniamy warunki brzegowe.

$$\sigma_{rr}(a) = \frac{1}{h_2},\quad \sigma_{rr}(2a) = 0$$

$$A = -\frac{1-\nu}{3\,E\,h}$$

$$B = -\frac{4\,a^2\,(1+\nu)}{3\,E\,h}$$

Ostatecznie.

$$u = -\frac{r\,(1-\nu)}{3\,E\,h} - \frac{4\,a^2\,(1+\nu)}{3\,E\,h\,r}$$

$$\delta_{11\,p} = -\,u(a) = \frac{a\,(5+3\,\nu)}{3\,EE\,h}$$

Stan $X_2 = 1$

- **Walec**

Rozkład sił wewnętrznych.

$$N_1 = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])}{a}$$

$$Q_2 = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda\,\mathrm{Sin}[\lambda\,\xi]}{a}$$

$$M_2 = -e^{-\lambda\,\xi}\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])$$

$$M_1 = \nu\,M_2 = e^{-\lambda\,\xi}\,\nu\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] + \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])$$

Rozkład przemieszczeń.

$$\delta = -\frac{2\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^2\,(\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi] - \mathrm{Sin}[\lambda\,\xi])}{E\,h}$$

$$\chi = \frac{4\,e^{-\lambda\,\xi}\,\lambda^3\,\mathrm{Cos}[\lambda\,\xi]}{E\,a\,h}$$

Poszukiwane przemieszczenia.

$$\delta_{12\,w} = -\frac{2\,\lambda^2}{E\,h}$$

$$\delta_{22\,w} = \frac{4\,\lambda^3}{E\,a\,h}$$

- **Płyta**

Warunki brzegowe

$$Q_2(1) = 0$$
$$M_2(1) = 0$$
$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$M_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1$$

Poszukiwane przemieszczenie.

$$\delta_{22\,p} = -\,\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5\,a + 3\,a\,\nu}{3\,D - 3\,D\,\nu^2}$$

Rozwiązanie układu równań

Po rozwiązaniu układu równań metody zaburzeń brzegowych otrzymujemy najstępujące siły wewnętrzne.

$$X_1 = \left(E^2\,h^2\left(0. + \frac{a^2\,q\,\lambda^2\,(5.69678 + 1.69678\,\nu)}{E\,h\,\left(0. + D\,\left(-1. + \nu^2\right)\right)}\right)\right) \Big/ \left(4.\,\lambda^4 - \left(1.\,(1.66667 + 2.\,\lambda + 1.\,\nu)\,\left(E\,a^2\,h\,(5. + 3.\,\nu) + D\,\lambda^3\,\left(12. - 12.\,\nu^2\right)\right)\right) \Big/ \left(D\,\left(3. - 3.\,\nu^2\right)\right)\right)$$

$$X_2 = \left(1.\,D\,E\,a^3\,h\,q\,(2.84839 + 0.848392\,\nu)\,(1.66667 + 2.\,\lambda + 1.\,\nu)\,\left(3. - 3.\,\nu^2\right)\right) \Big/ \left(\left(0. + D\,\left(-1. + \nu^2\right)\right)\,\left(E\,a^2\,h\,(-8.33333 + \lambda\,(-10. - 6.\,\nu) + (-10. - 3.\,\nu)\,\nu) + D\,\lambda^3\,\left(-20. + \lambda\,\left(-12. + 12.\,\nu^2\right) + \nu\,(-12. + \nu\,(20. + 12.\,\nu))\right)\right)\right)$$

Dalej przyjęto następujące dane liczbowe.

$$h \to 0.2$$
$$q \to 10\,000$$
$$E \to 30\,000\,000\,000$$
$$a \to 5$$
$$\nu \to 0.2$$

Z przyjętych danych wynikają następujące wartości sztywności płytowej i współczynnika λ.

$$D = \frac{E\,h^3}{12\,\left(1 - \nu^2\right)} = 2.08333 \times 10^7$$

$$\lambda = \left(\frac{3\,\left(1 - \nu^2\right)\,a^2}{h^2}\right)^{0.25} = 6.51356$$

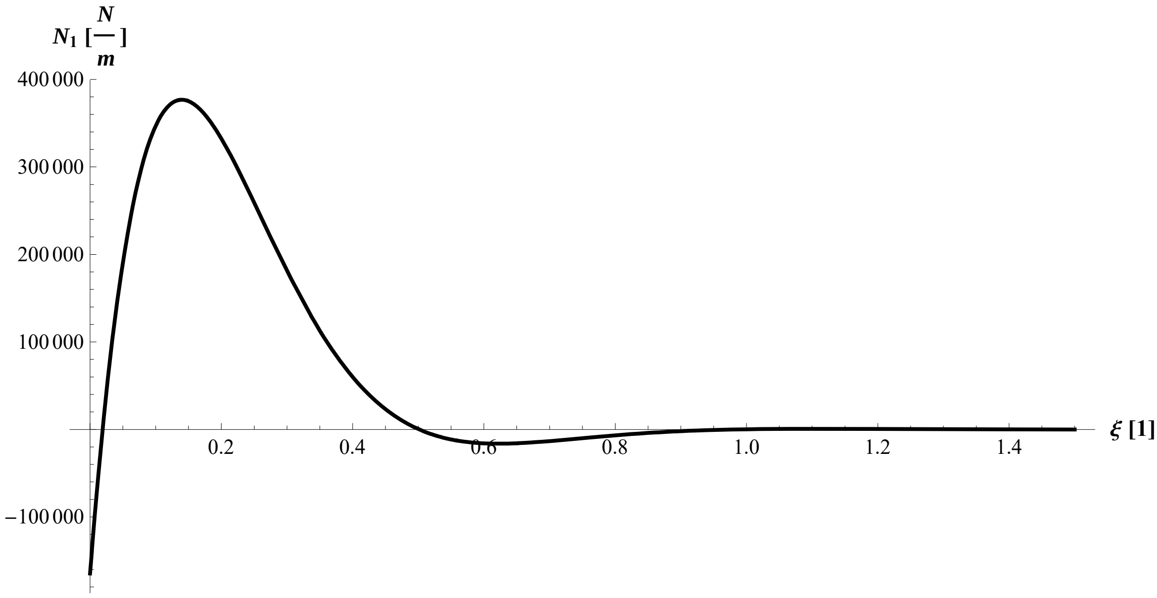
Czyli poszukiwane siły mają następujące wartości.

$$X_1 = 88\,195.5$$
$$X_2 = 77\,402.5$$

Wykresy sił wewnętrznych

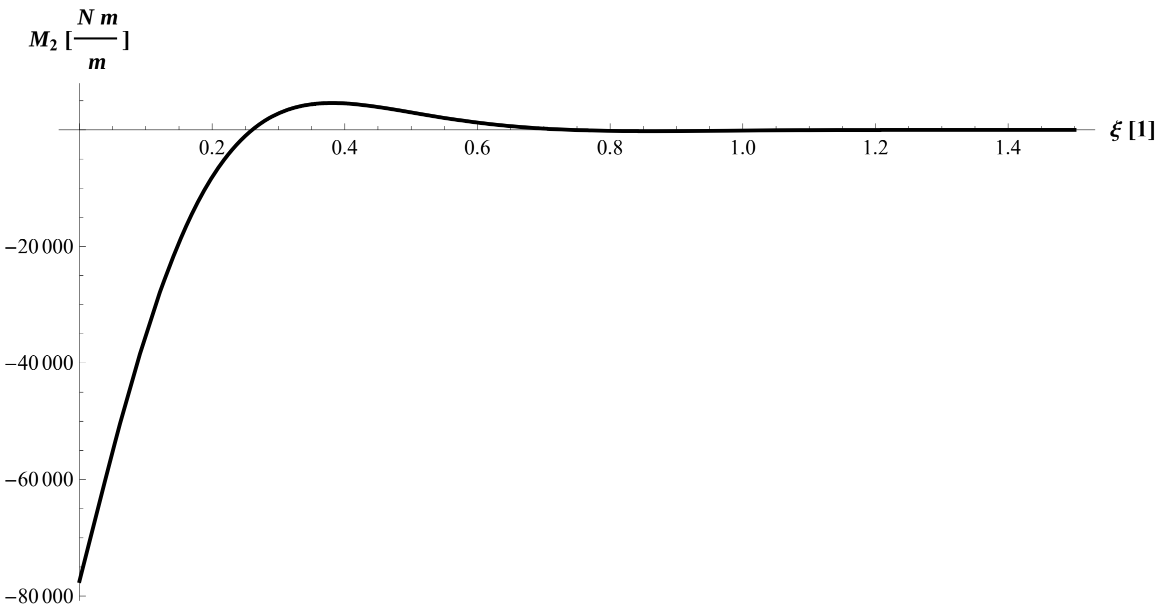
- **Siła równoleżnikowa**

$N_1 = X_1 N_1(X_1) + X_2 N_1(X_2)$



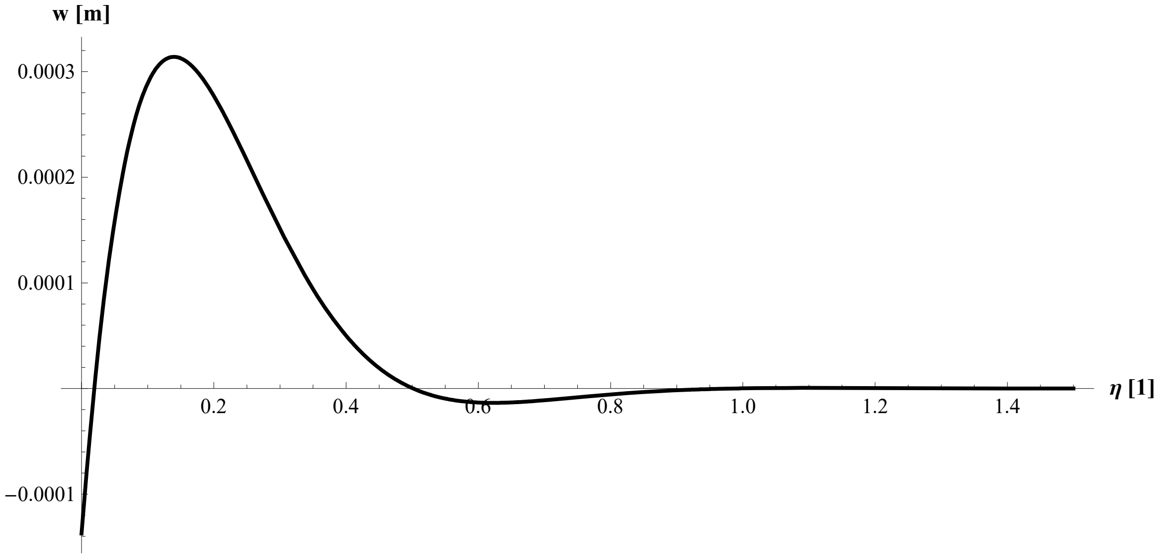
- **Moment południkowy**

$M_2 = X_1 M_2(X_1) + X_2 M_2(X_2)$

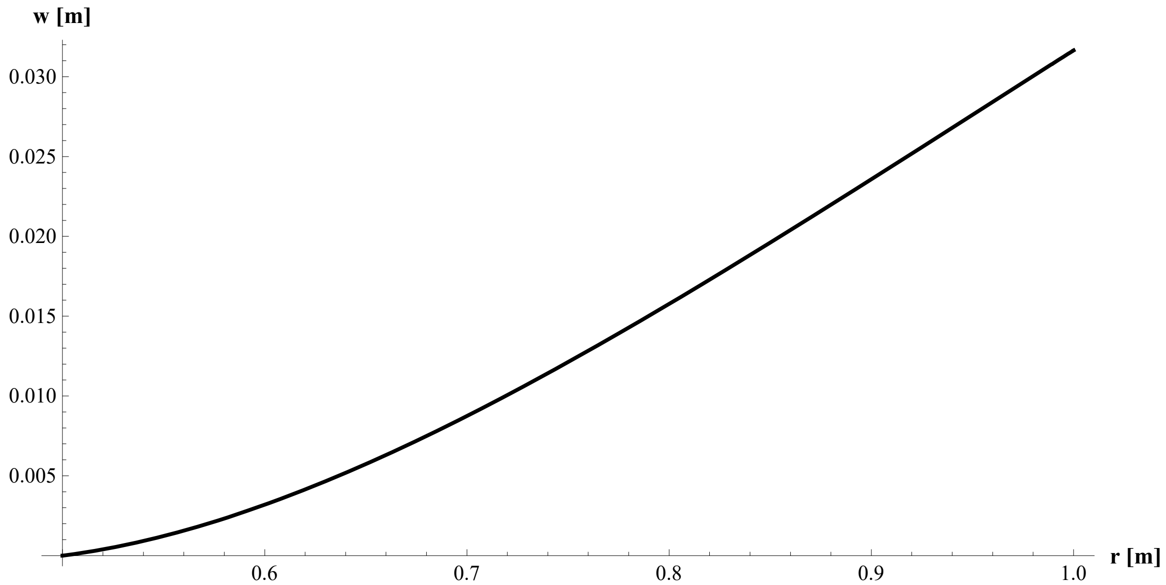


Wykres przemieszczenia normalnego

- **Dla walca**



- **Dla płyty (wykres ugięcia)**



Sprawdzenie zgodności przemieszczeń i kątów obrotu w miejscu połączenia płyty z walcem

- **Zgodność przemieszczeń**

Walec

$\delta_s = \delta_{10\,w} + X_1\ \delta_{11\,w} + X_2\ \delta_{12} = -0.000137193$

Płyta

$\delta_p = \delta_{10\,p} + \delta_{11\,p}\ X_1 = 0.000137193$

- **Zgodność kątów obrotu**

Walec

$\chi_s = \delta_{12}X1 + \delta_{20\,s} + \delta_{22\,s}X_2 = 0.00160472$

Płyta

$\chi_p = \delta_{20\,p} + \delta_{22\,p}X_2 = -0.00160472$

UWAGA!!!
W zadaniu nie chodzi o przepisywanie wzorów z materiałów, ani doprowadzenie obliczeń do końca. Należy wykazać się: znajmością metody zaburzeń brzegowych, umiejętnością zapisywania warunków brzegowych dla płyt i tarcz kołowych oraz powłoki walcowej, umiejętnością poprawnej interpretacji "δ".

Bibliografia

[1] Z.Mazurkiewicz, Cienkie powłoki sprężyste, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1995