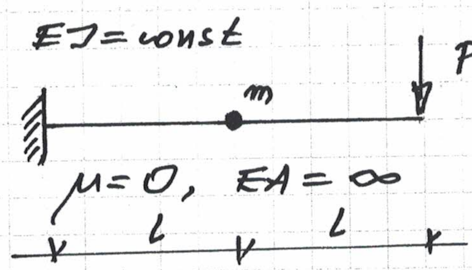
Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji II, 10 lutego 2025 r.

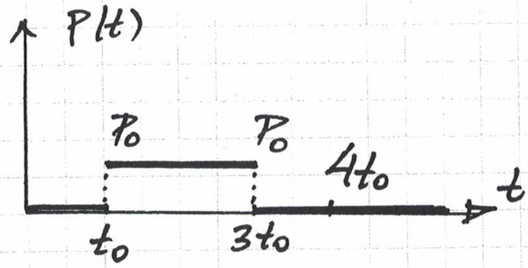
Imię i NAZWISKO				
Prowadzący ćwiczenia, nr grupy				
ocena zadania 1	ocena zadania 2	ocena zadania 3	ocena egz. pis.	Ocena ostateczna z egzaminu
				Ocena łączna

Zadanie 1

Dany jest wspornik: nieważki pręt o stałej sztywności z masą skupioną w środku, obciążony jak na rysunku. Obciążenie zmienia się w czasie zgodnie z podanym wykresem. Warunki początkowe są jednorodne. Zapisać równania określające przemieszczenie pionowe masy w chwili $t=4t_o$.

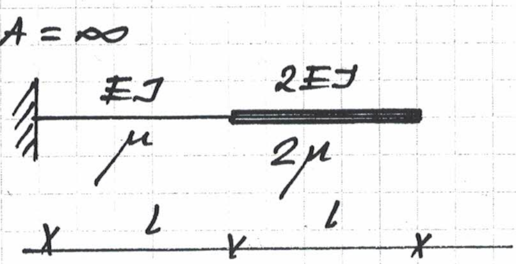
(Given is a cantilever: a massless bar of constant stiffness with a concentrated mass in the middle, loaded as shown in the figure. The load varies in time according to the given plot. The initial conditions are homogeneous. Write down equations which determine the vertical displacement of the mass at the time instant $t=4t_o$.





Zadanie 2

Dany jest wspornik: pręt o zmiennej sztywności, zmiennej gęstości masy, jak na rysunku. Zapisać równania określające częstości drgań własnych wspornika. (Given is a cantilever: a bar of varying stiffness and varying mass density, cf the figure. Write down equations which determine the eigenfrequencies of the cantilever).



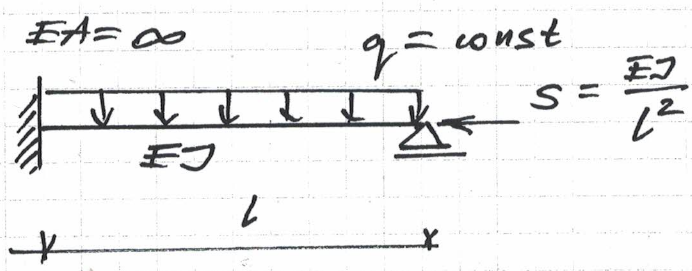
Zadanie 3

3.1 Wyprowadzić równania opisujące ugięcie belki prostej pryzmatycznej przy obecności dużej siły ściskającej

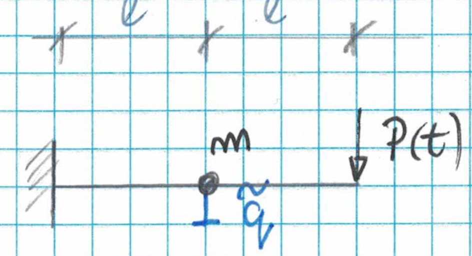
3.2 Zapisać równania opisujące ugięcie belki danej na rysunku

(3.1 Derive the equations modeling deflection of straight prismatic beams in the presence of a big compression force.

3.2 Write down the equations describing deflection of the given beam)



ZADANIE 1 Egzamin MK 2 10.11.2025



$\mu = 0$ EJ = const.

$EA \to \infty$

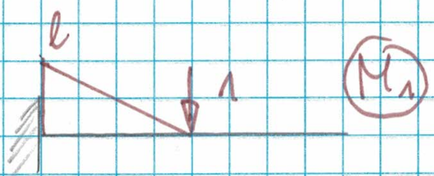
r-nie ruchu

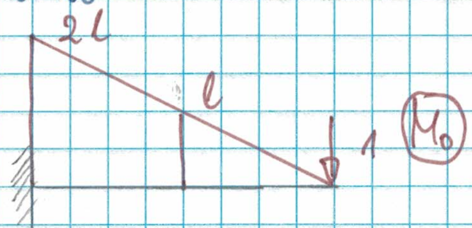
$$m\ddot{\tilde{q}} + k\tilde{q} = \frac{d_{10}}{d_{11}}\tilde{P}(t)$$

$$\tilde{P}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ P_0, & t \in \langle t_0, 3t_0 \rangle \\ 0, & t > 3t_0 \end{cases}$$

$$q(0) = 0 \qquad \dot{q}(0) = 0$$

Podatności d_{11}, d_{10}





$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} l\right] = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{10} = \frac{1}{EJ}\left[\frac{1}{2} l \cdot l \cdot \left(\frac{2}{3} 2l + \frac{1}{3} l\right)\right] = \frac{5}{6}\frac{l^3}{EJ}$$

$$k = \frac{1}{d_{11}} = 3\frac{EJ}{l^3}$$

Częstość drgań własnych $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}$

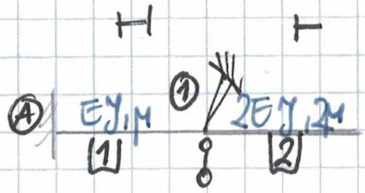
Korzystam z całki Duhamela

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \int_{t_0}^{t} \frac{1}{m}\frac{5}{2} P_0 \frac{\sin(\omega t - \omega\tau)}{\omega} d\tau \\ \int_{t_0}^{3t_0} \frac{1}{m}\frac{5}{2} P_0 \frac{\sin(\omega t - \omega\tau)}{\omega} d\tau \end{cases}$$

Odp. $\tilde{q}(4t_0)$

ZADANIE 2;

UGW



$$q = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \frac{w}{l} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = l \sqrt[4]{\frac{\mu \omega^2}{EJ}}$$

$$\lambda_1 = \lambda$$

$$\lambda_2 = \lambda$$

p.p.

r.r. MP

$$\begin{cases} \Phi_1^{(1)} + \Phi_1^{(2)} = 0 \\ -W_1^{(1)} \bar{w} - W_1^{(2)} \bar{w} = 0 \end{cases}$$

WT

1]

$$\Phi_1^{(1)} = \frac{EJ}{l} \left[\alpha(\lambda) \varphi_1 - \theta(\lambda) \frac{w}{l} \right]$$

$$W_1^{(1)} = -\frac{EJ}{l^2} \left[\theta(\lambda) \varphi_1 - \gamma(\lambda) \frac{w}{l} \right]$$

2]

$$\Phi_1^{(2)} = \frac{2EJ}{l} \left[\alpha''(\lambda) \varphi_1 + \theta''(\lambda) \frac{w}{l} \right]$$

$$W_1^{(2)} = \frac{2EJ}{l^2} \left[\theta''(\lambda) \varphi_1 + \gamma''(\lambda) \frac{w}{l} \right]$$

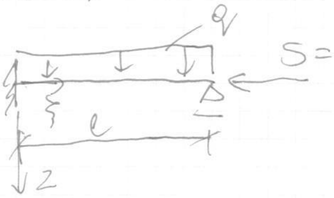
$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} \alpha(\lambda) + 2\alpha''(\lambda) & -\theta(\lambda) + 2\theta''(\lambda) \\ -\theta(\lambda) + 2\theta''(\lambda) & \gamma(\lambda) + 2\gamma''(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \frac{w}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K}(\lambda)\, q = 0$$

$$\det \mathbb{K}(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots \Rightarrow \omega_1 = \lambda_1^2 \sqrt{\frac{EJ}{\mu l^2}}$$

EGZAMIN MK2 ST 10.02.2025

Zad. 3.



$S = \frac{EJ}{l^2}$ $\qquad \xi = \frac{x}{l}$

3.1. Wyprowadzenie równania opisującego ugięcie belki prostej pryzmatycznej przy obecności dużej siły osiowej ściskającej znajduje się w notatkach wykładowych.

3.2. Zapisać równanie opisujące ugięcie belki danej na rysunku

$$\frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4} + \delta^2 \cdot \frac{d^2 w}{d\xi^2} = \frac{qL^4}{EJ} \qquad \delta = \sqrt{\frac{S \cdot l^2}{EJ}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{EJ}{l^2} \cdot l^2}{EJ}} = 1$$

$$\frac{d^4 w(\xi)}{d\xi^4} + 1^2 \cdot \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} = \frac{qL^4}{EJ}$$

$$w(\xi) = w_0(\xi) + w_s(\xi)$$

całka ogólna $w_0(\xi)$

$$\frac{d^4 w_0(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^2 w_0(\xi)}{d\xi^2} = 0$$

$$w_0(\xi) = A e^{r\xi}$$

$$r^4 A e^{r\xi} + r^2 A e^{r\xi} = 0 \Rightarrow r^4 + r^2 = 0$$

równanie charakterystyczne

EG2. MK2 ST 10.02.2025r.

$r^2(r^2+1)=0 \qquad r_{1,2}=0 \qquad r_{3,4}=\pm i$

$w_0(\xi) = A_1 + A_2\xi + A_3 e^{i\xi} + A_4 e^{-i\xi} =$

$= C_1 + C_2\xi + C_3\sin(\xi) + C_4\cos(\xi)$

całke szczególne $w_s(\xi)$

$\frac{d^4 w_s(\xi)}{d\xi^4} + \frac{d^2 w_s(\xi)}{d\xi^2} = \frac{q l^4}{EJ} \qquad q(\xi) = const = q$

zakładamy $w_s(\xi) = D_2\xi^2 + D_3\xi^3$

$0 + 2D_2 + 6D_3\xi = \frac{q l^4}{EJ}$

$2D_2 = \frac{q l^4}{EJ} \Rightarrow D_2 = \frac{1}{2}\frac{q l^4}{EJ}$

$6D_3 = 0 \Rightarrow D_3 = 0$

$w_s(\xi) = \frac{1}{2}\frac{q l^4}{EJ}\xi^2$

rozwiązanie:

$w(\xi) = w_0(\xi) + w_s(\xi) = C_1 + C_2\xi + C_3\sin(\xi) + C_4\cos(\xi) + \frac{1}{2}\frac{q l^4}{EJ}\xi^2$

warunki brzegowe

1) $w(0)=0 \Rightarrow C_1 = 0$

2) $\varphi(0) = 0$

$\varphi(\xi) = \frac{1}{l}\frac{dw}{d\xi} = \frac{1}{l}\left[C_2 + C_3\cos\xi - C_4\sin\xi + \frac{q l^4}{EJ}\xi\right]$

2) $\frac{1}{l}\left[C_2 + C_3\right] = 0 \Rightarrow C_2 = -C_3$

3) $w(1) = 0 \Rightarrow C_2 + C_3\sin 1 + C_4\cos 1 + \frac{1}{2}\frac{q l^4}{EJ} = 0$

4) $M(1) = 0$

EG2. MK2 ST 10.02.2025

3/3

$$M(\xi) = EJ\chi = -\frac{EJ}{l^2}\frac{d^2w}{d\xi^2} =$$

$$= -\frac{EJ}{l^2}\left[-C_3\sin(\xi) - C_4\cos(\xi) + \frac{1}{2}\frac{ql^4}{EJ}\right]$$

4) $-\frac{EJ}{l^2}\left[-C_3\sin(1) - C_4\cos(1) + \frac{1}{2}\frac{ql^4}{EJ}\right] = 0$

2) do 3) $\begin{cases} C_3(\sin(1) - 1) + C_4\cos(1) = -\frac{1}{2}\frac{ql^4}{EJ} \\ -C_3\sin(1) - C_4\cos(1) = -\frac{1}{2}\frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$ 4) +

$$-C_3 = -\frac{ql^4}{EJ} \Rightarrow C_3 = \frac{ql^4}{EJ}$$

$$C_2 = -C_3 = -\frac{ql^4}{EJ}$$

$$C_4\cos(1) = +\frac{1}{2}\frac{ql^4}{EJ} - C_3\sin(1) = \frac{1}{2}\frac{ql^4}{EJ} - \frac{ql^4}{EJ}\sin(1)$$

$$C_4 = \frac{ql^4}{EJ}\left[\frac{1 - 2\sin(1)}{\cos(1)}\right]$$

$$w(\xi) = \frac{ql^4}{EJ}\left[-\xi + \sin(\xi) + \frac{1 - 2\sin(1)}{\cos(1)}\cos(\xi) + \frac{1}{2}\xi^2\right]$$