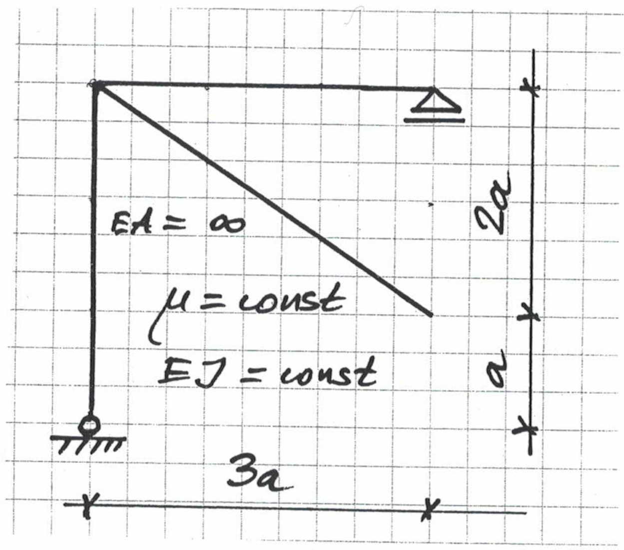
Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji II, 8 II 2023 r.

NAZWISKO imię				
Grupa	Data zaliczenia ćwiczeń		Numer albumu	
Ocena zadania 1	Ocena zadania 2	Ocena zadania 3	Ocena z egzaminu	Ocena łączna Data

Zadanie 1

Dana jest rama jak na rysunku.
Zapisać równania określające pierwszą częstość drgań własnych

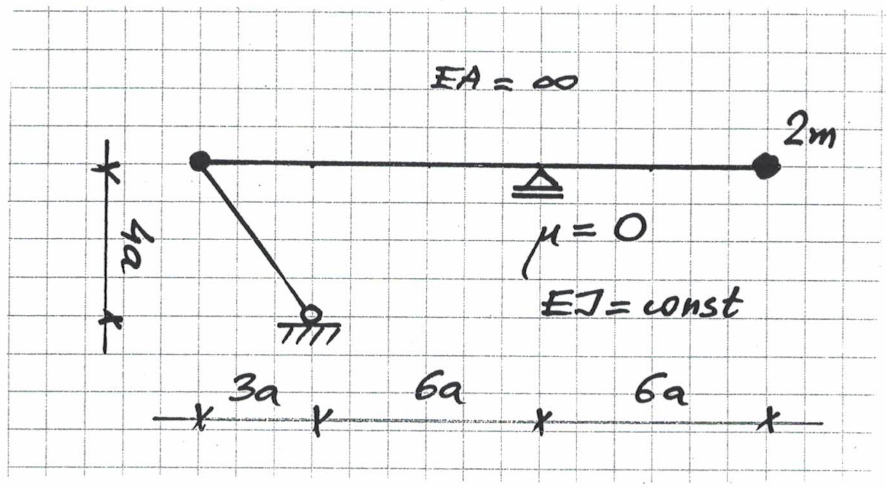
(*Given is a frame, cf. the figure. Write down the equations which determine the first circular eigenfrequency*)



Zadanie 2

Dana jest rama nieważka z masami skupionymi. Zapisać układ równań rozwiązujący zadanie drgań własnych.

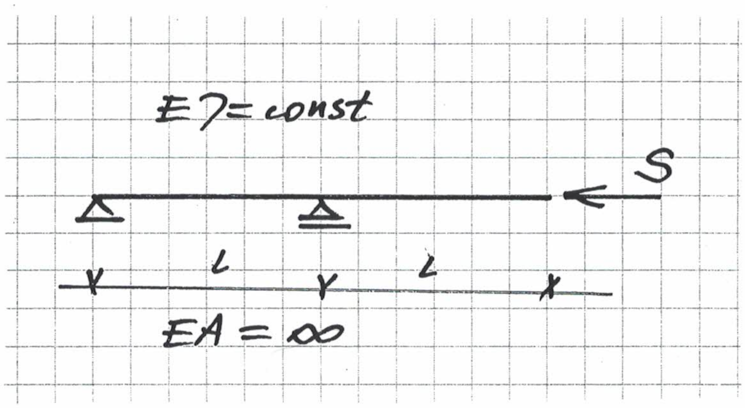
(*Given is a weightless frame with concentrated masses. Write down the equations solving the problem of eigenvibrations*)



Zadanie 3.

Dana jest belka obciążona dużą siłą osiową. Znajdź wartość siły krytycznej S.

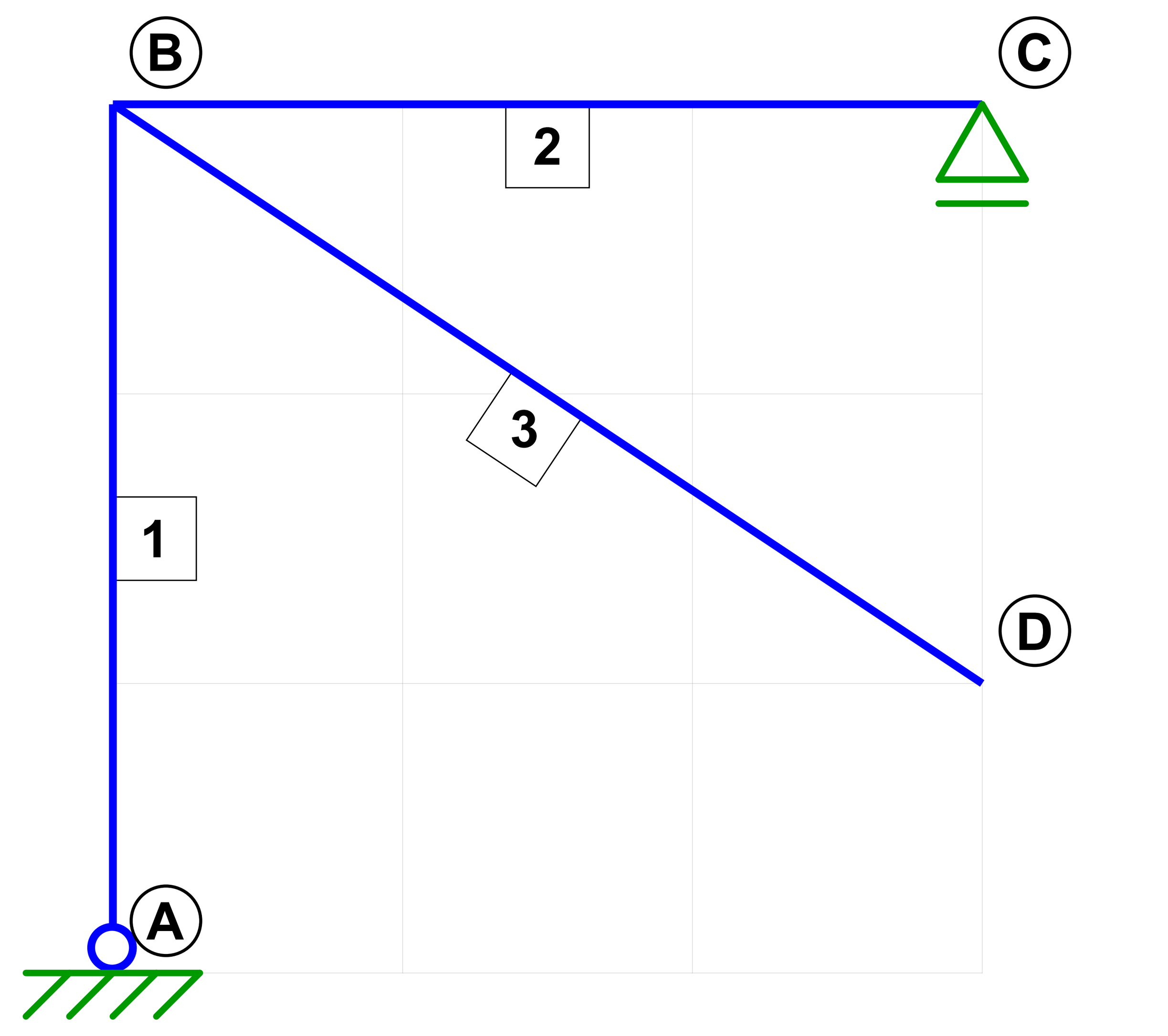
(*For the given beam subject to a big axial force compute the value of the critical force S*)



Egzamin MK2/MoS2 8.02.2023, Zadanie 1

Zapisać równania określające pierwszą częstość drgań własnych danej ramy o rozkładzie masy μ = const.

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – l):



Parametry λ w prętach:

$\lambda_1 = 3\,\lambda$

$\lambda_2 = 3\,\lambda$

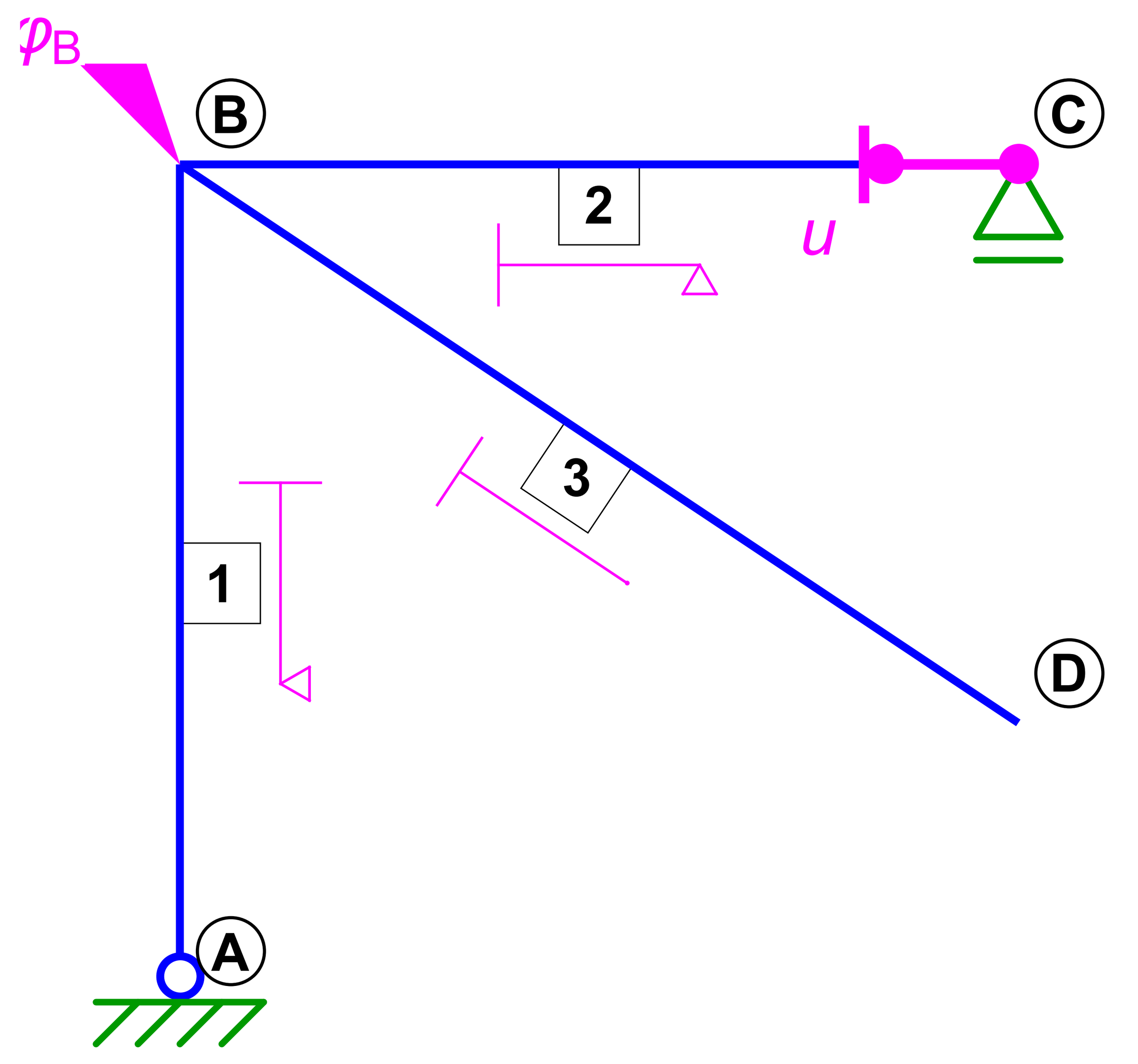
$\lambda_3 = \sqrt{13}\,\lambda$

Dokonano kondensacji statycznej prętow: 3

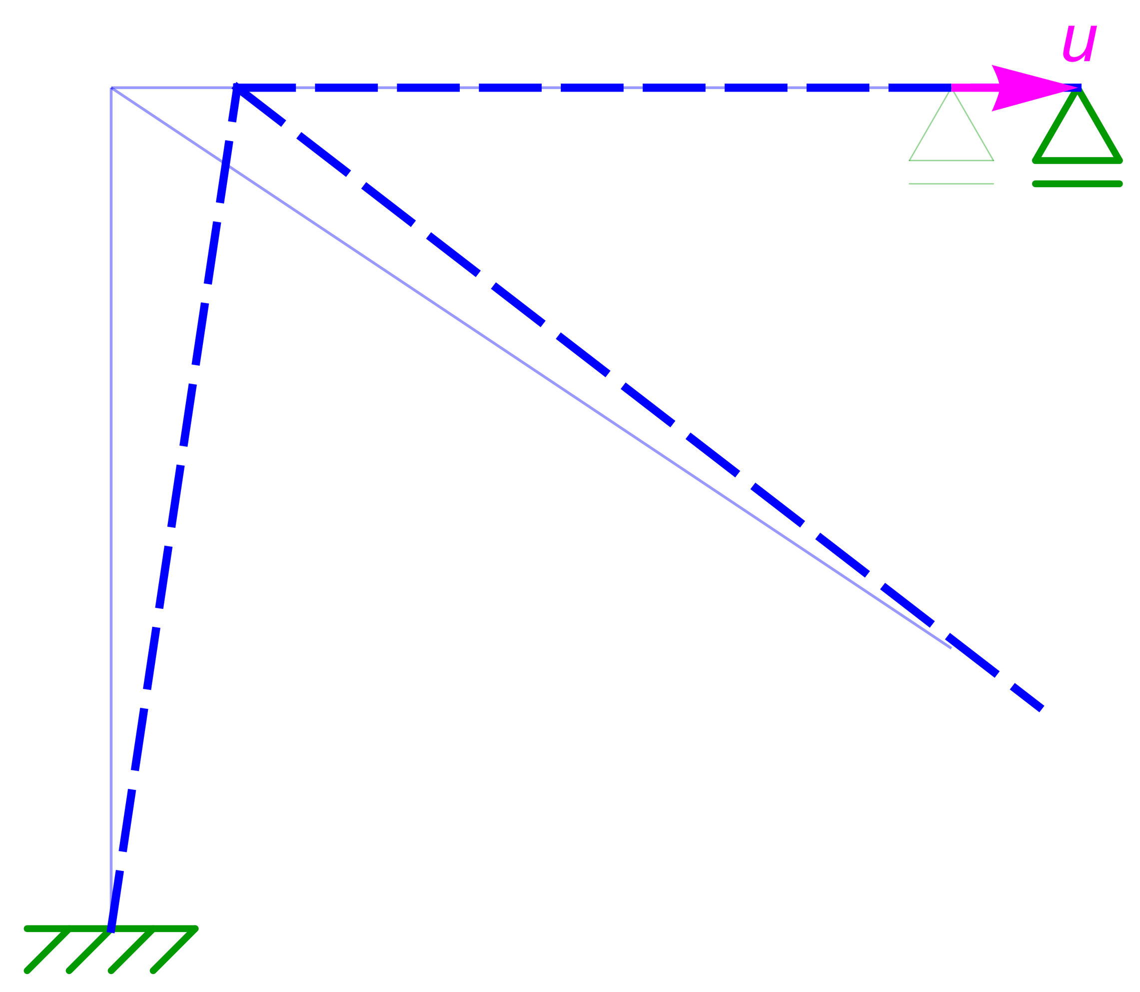
Wektor niewiadomych:

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi_B \\ \frac{u}{l} \end{pmatrix}$

Układ geometrycznie wyznaczalny:



Plan przemieszczeń:



	w_i^K	w_k^K	u^K
Pręt 1 :	$w_A^1 = 0$	$w_B^1 = u$	$u^1 = 0$
Pręt 2 :	$w_B^2 = 0$	$w_C^2 = 0$	$u^2 = u$
Pręt 3 :	$w_B^3 = -\frac{2}{\sqrt{13}}\,u$	$\overline{w}_B^3 = 0$	$u^3 = \frac{3}{\sqrt{13}}\,u$

Wzory transformacyjne:

$\Phi_B^1 = \frac{EJ}{l}\left[\frac{1}{3}\,\alpha'(3\lambda)\,\varphi_B - \frac{1}{9}\,\vartheta'(3\lambda)\,\frac{u}{l}\right]$

$\Phi_B^2 = \frac{EJ}{l}\left[\frac{1}{3}\,\alpha'(3\lambda)\,\varphi_B\right]$

$\Phi_B^3 = \frac{EJ}{l}\left[\frac{1}{\sqrt{13}}\,\alpha''(\sqrt{13}\,\lambda)\,\varphi_B - \frac{2}{13\sqrt{13}}\,\vartheta''(\sqrt{13}\,\lambda)\,\frac{u}{l}\right]$

$W_B^1 = \frac{EJ}{l^2}\left[-\frac{1}{9}\,\vartheta'(3\lambda)\,\varphi_B + \frac{1}{27}\,\gamma'(3\lambda)\,\frac{u}{l}\right]$

$W_B^3 = \frac{EJ}{l^2}\left[\frac{1}{13}\,\vartheta''(\sqrt{13}\,\lambda)\,\varphi_B - \frac{2}{169}\,\gamma''(\sqrt{13}\,\lambda)\,\frac{u}{l}\right]$

Osiowe siły bezwładności w prętach:

$B_{||}^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot 3\,l \cdot u = \frac{EJ}{l^2}\left[3\,\lambda^4\,\frac{u}{l}\right]$

$B_{||}^3 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \sqrt{13}\,l \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}\,u = \frac{EJ}{l^2}\left[3\,\lambda^4\,\frac{u}{l}\right]$

Równania równowagi:

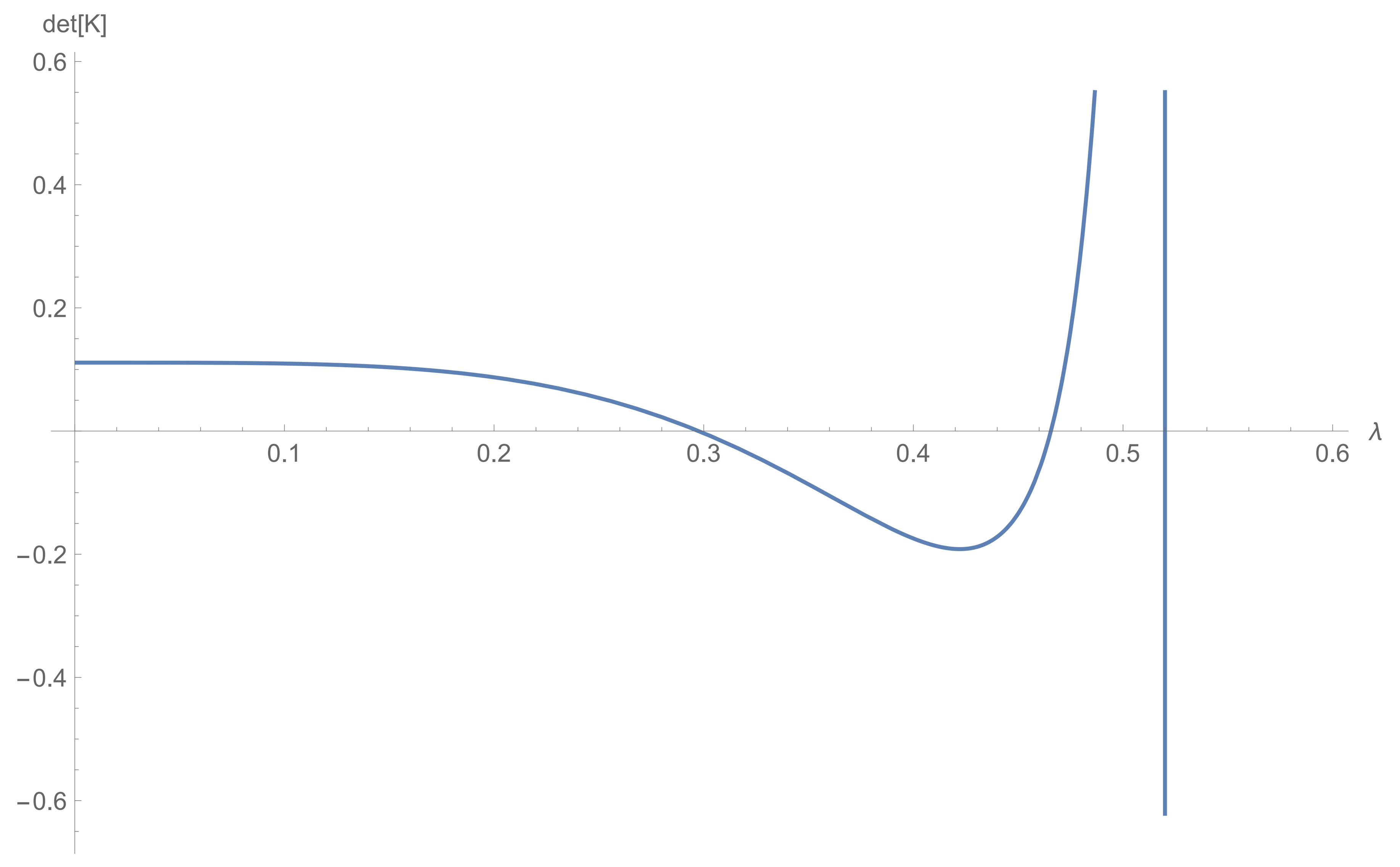
$\Phi_B^1 + \Phi_B^2 + \Phi_B^3 = 0$

$-W_B^1 \cdot \overline{u} - W_B^3 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\,\overline{u}\right) + B_{||}^2 \cdot \overline{u} + B_{||}^3 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}\,\overline{u} = \overline{0}$

Macierz sztywności konstrukcji:

$$\mathbf{K}(\lambda) = \frac{EJ}{l}\begin{pmatrix} \frac{2\alpha'(3\lambda)}{3} + \frac{\alpha''(\sqrt{13}\,\lambda)}{\sqrt{13}} & -\frac{\vartheta'(3\lambda)}{9} - \frac{2\vartheta''(\sqrt{13}\,\lambda)}{13\sqrt{13}} \\ -\frac{\vartheta'(3\lambda)}{9} - \frac{2\vartheta''(\sqrt{13}\,\lambda)}{13\sqrt{13}} & \frac{\gamma'(3\lambda)}{27} + \frac{4\gamma''(\sqrt{13}\,\lambda)}{169\sqrt{13}} - 3\lambda^4 - \frac{9\lambda^4}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

Wykres wyznacznika macierzy sztywności w zależności od parametru λ:



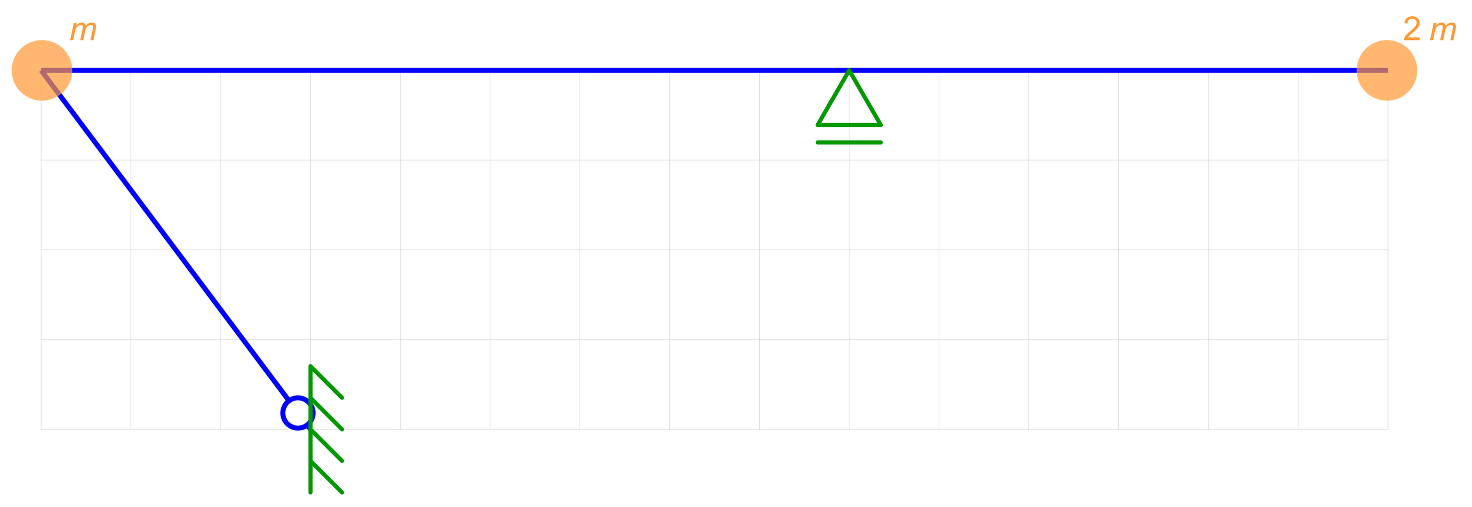
Pierwsza częstość drgań własnych wynosi $\omega^{(1)} = 0.089\,\frac{\sqrt{\frac{EJ}{\mu}}}{l^2}$

Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.

Egzamin MK2/MoS2, Zadanie 2

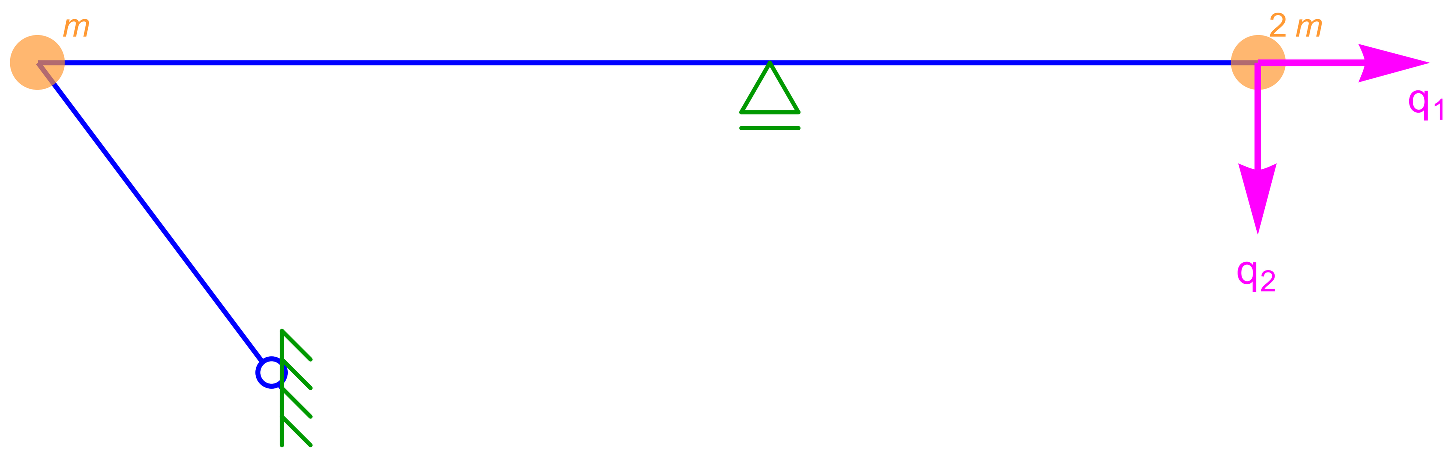
Zapisać równania określające częstości drgań własnych konstrukcji (przyjąć $\mu = 0$).

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – l):

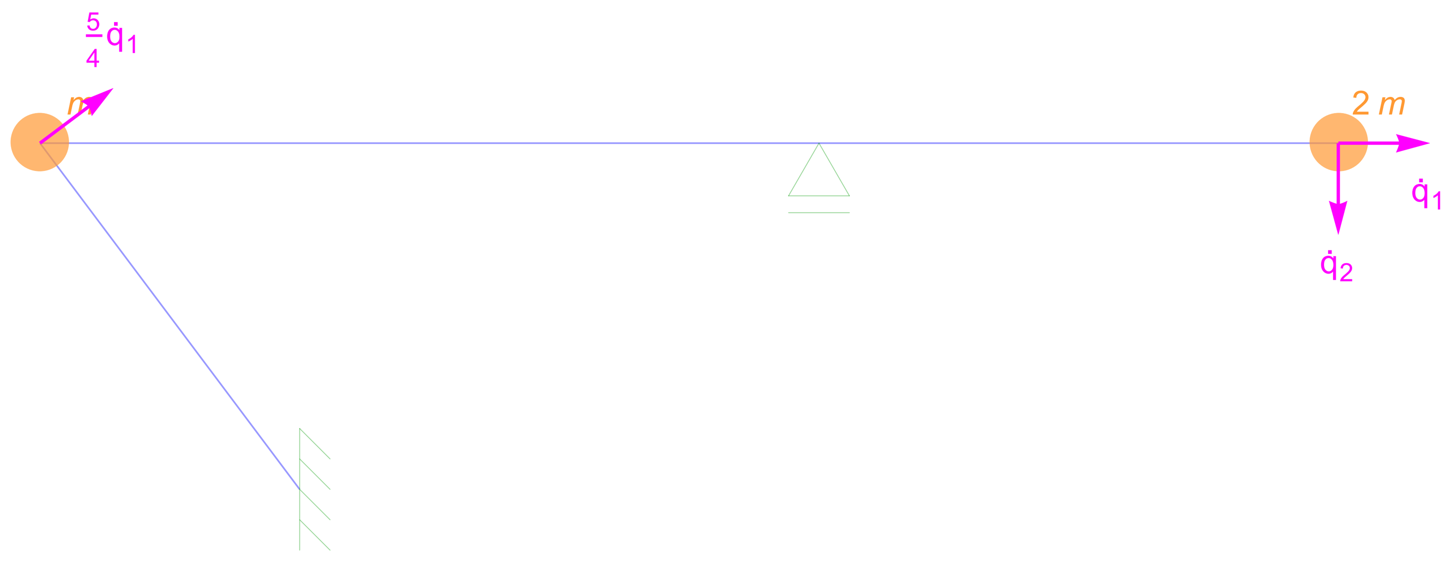


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

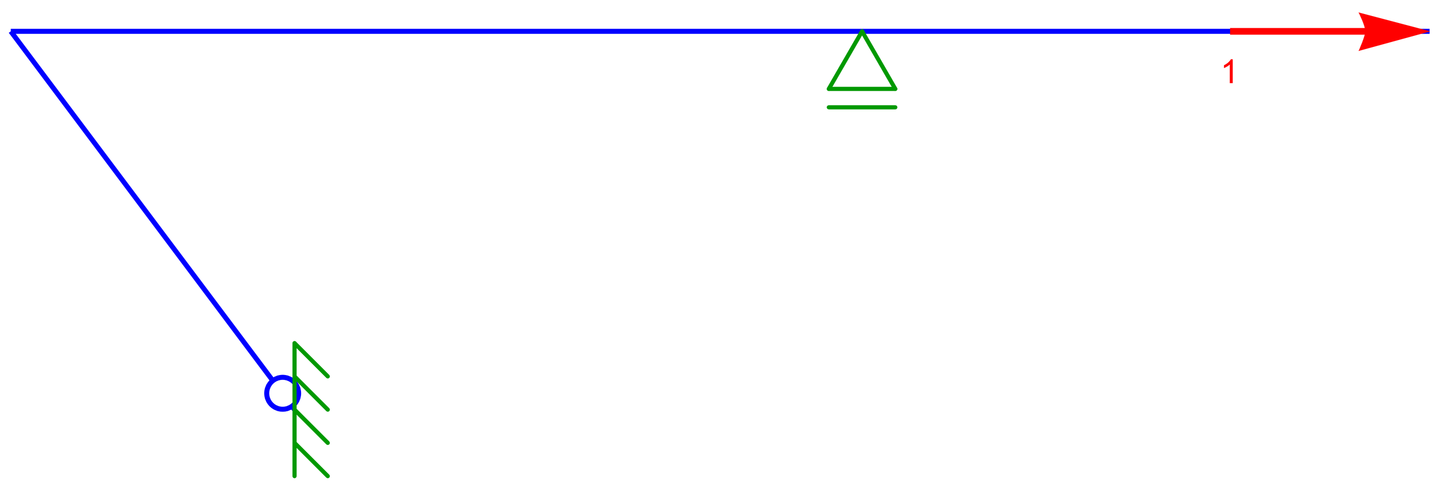
$$2\,E_k\,(\dot{\mathbf{q}}) = m\left(\frac{5}{4}\dot{q}_1\right)^2 + 2\,m\left[\dot{q}_2^{\,2} + \dot{q}_1^{\,2}\right] = \frac{57}{16}\,m\,\dot{q}_1^{\,2} + 2\,m\,\dot{q}_2^{\,2} = \dot{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$$

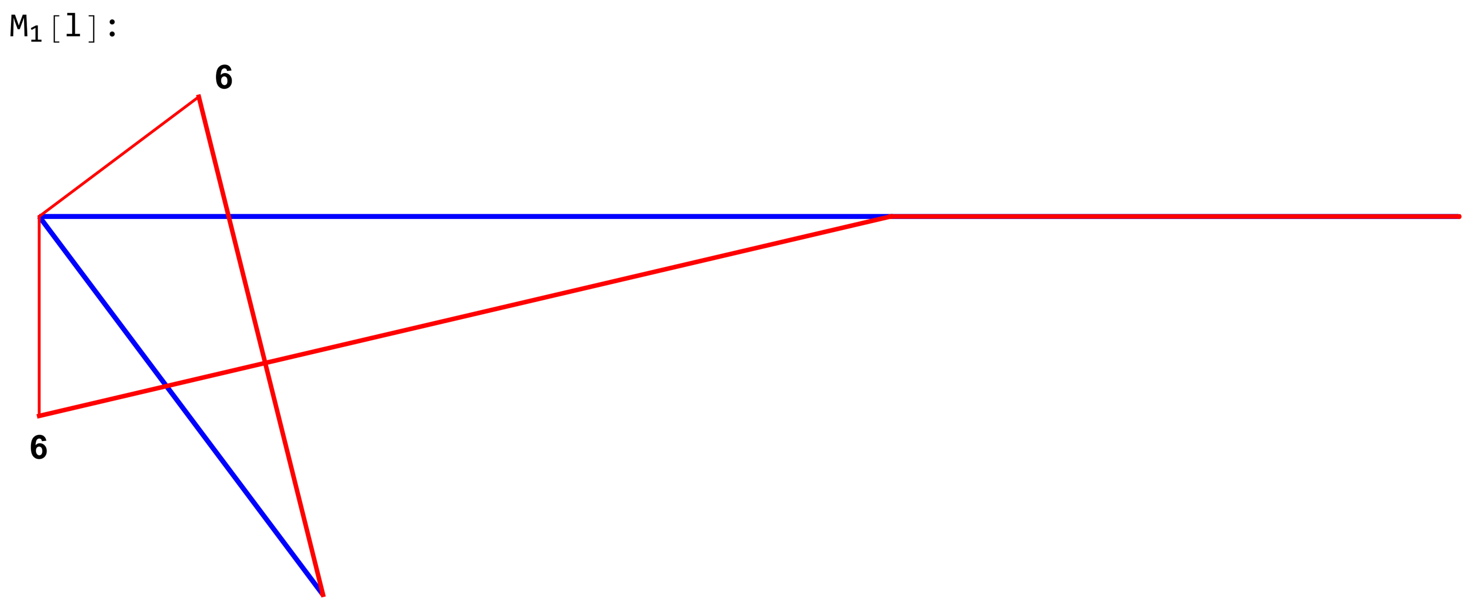
Macierz mas:

$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix} \frac{57}{16} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

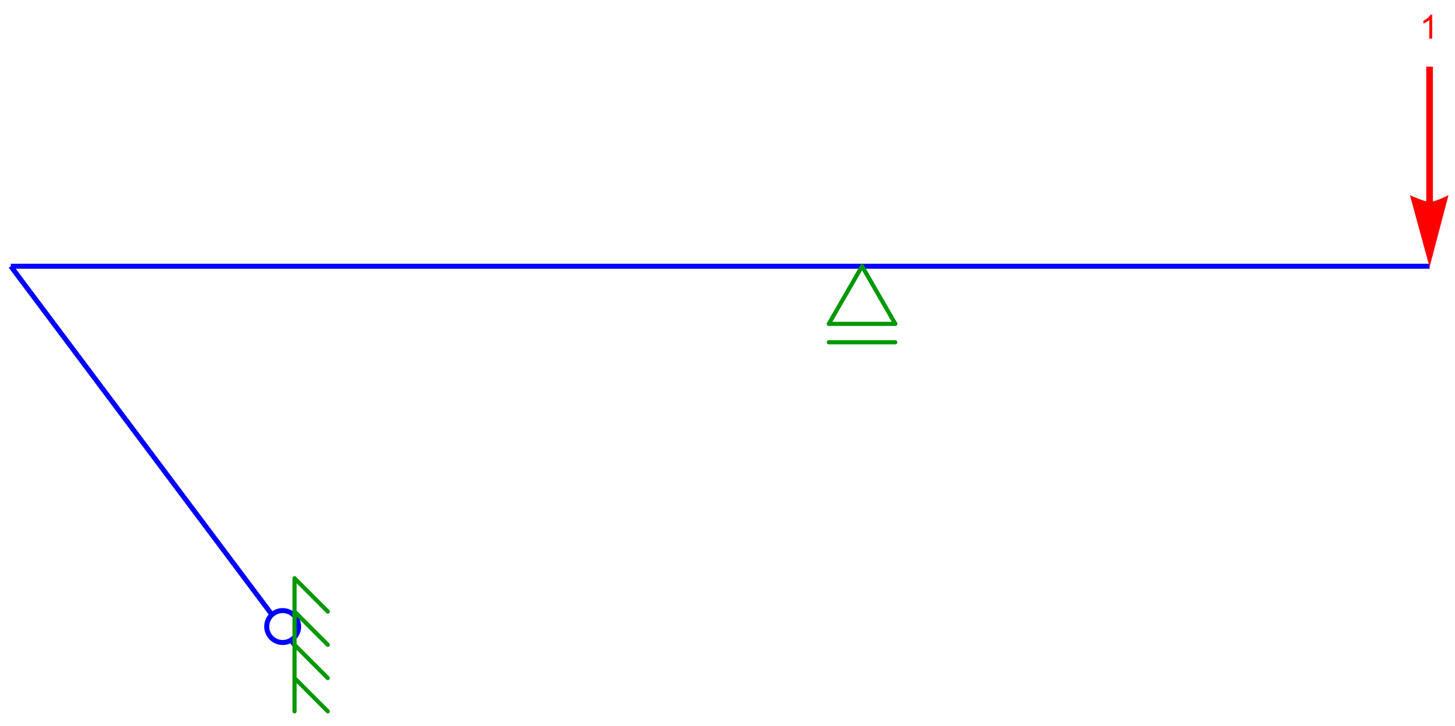
Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

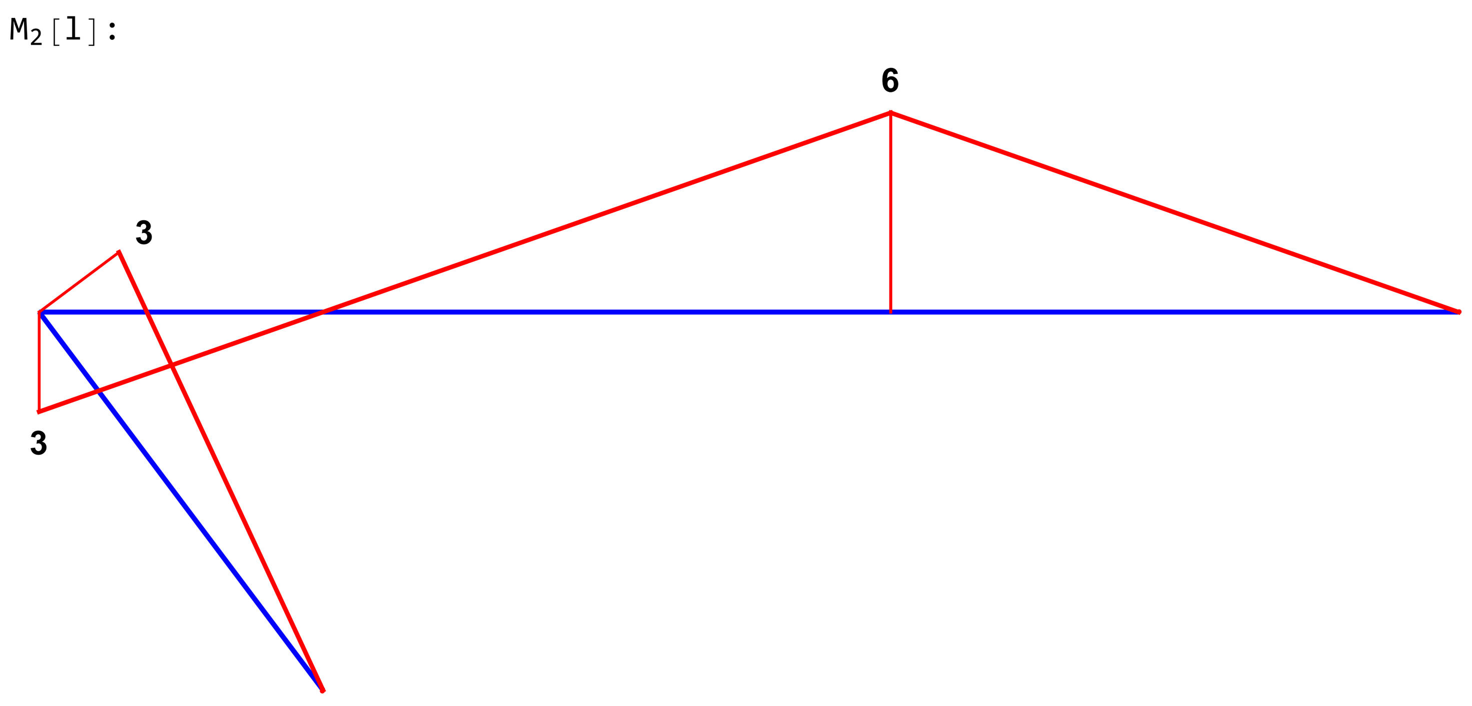
– od q_1:





– od q_2:





Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 6l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 6l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 6l\cdot 9\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 6l\right)\right]_2 = 168\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 6l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 6l\cdot 9\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l+\frac{1}{3}\cdot(-6l)\right)\right]_2 = 30\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot 5\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 3l\cdot 9\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 3l+\frac{1}{3}\cdot(-6l)\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot 6l\cdot 9\,l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot(-3l)+\frac{2}{3}\cdot 6l\right)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 6l\cdot 6\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 6l\right)\right]_3 = 168\,\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix} 168 & 30 \\ 30 & 168 \end{pmatrix}$$

ZADANIE DRGAŃ WŁASNYCH:

– poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$$\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{a}\,\sin(\omega t)$$

– zadanie własne:

$$(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,)\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

– równanie charakterystyczne $\left(\lambda = \frac{\omega^2\,l^3\,m}{EJ}\right)$:

$$\det(\,\mathbf{I} - \omega^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,) = 0$$

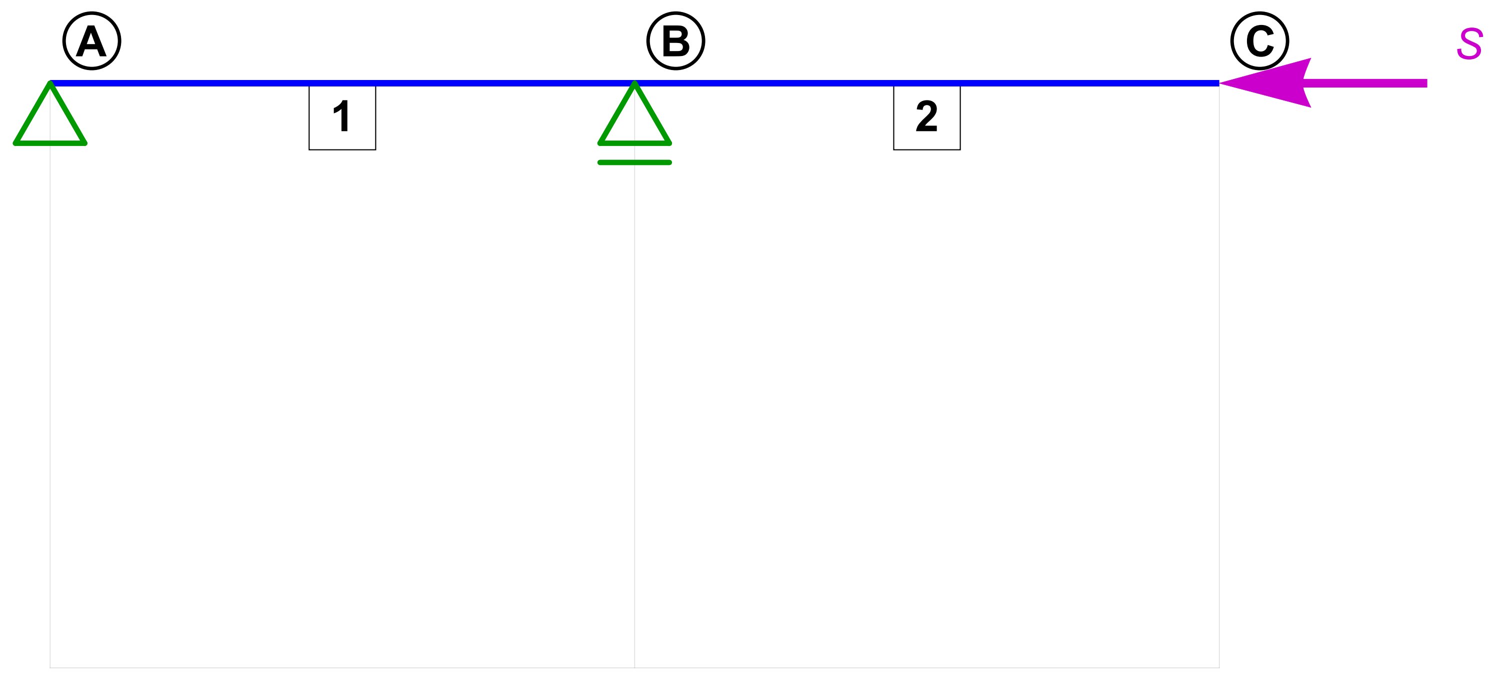
$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 - \frac{1197\,\lambda}{2} & -60\,\lambda \\ -\frac{855\,\lambda}{8} & 1 - 336\,\lambda \end{pmatrix}\right) = 1 - \frac{1869\,\lambda}{2} + \frac{389\,367\,\lambda^2}{2} = 0$$

Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.

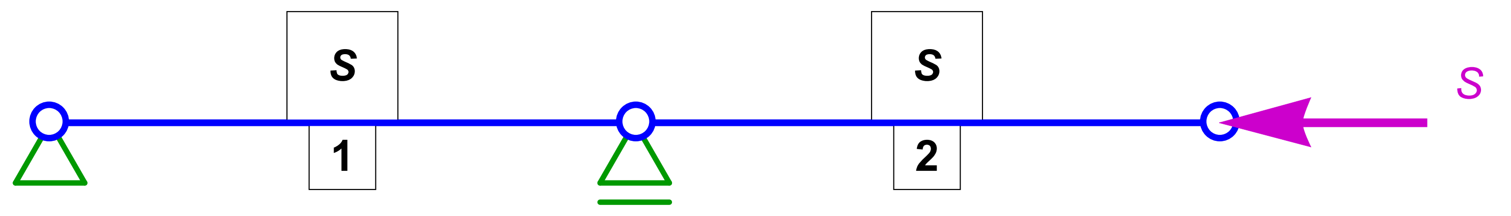
Egzamin MK2/MoS2, Zadanie 3

Znaleźć wartość siły krytycznej.

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki - l):



Rozkład dużych sił osiowych:



Parametry σ w prętach:

$\sigma^{(1)} = \sigma$

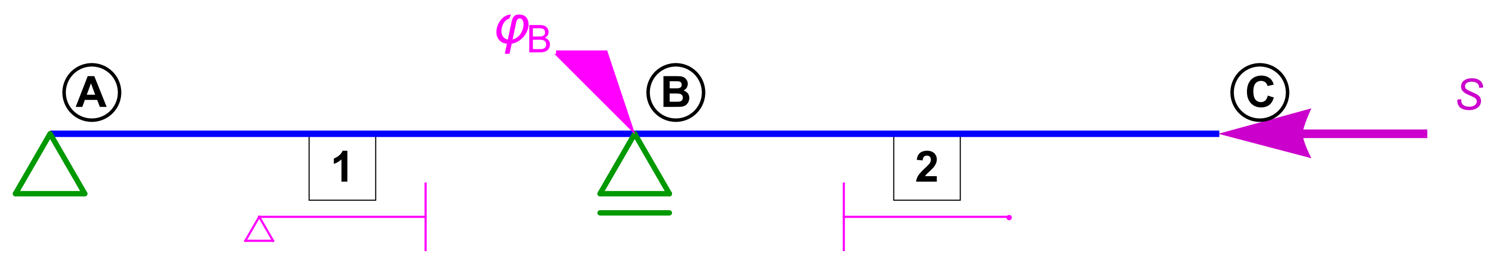
$\sigma^{(2)} = \sigma$

Dokonano kondensacji statycznej prętow: 2

Wektor niewiadomych:

$\mathbf{q} = (\varphi_B)$

Układ geometrycznie wyznaczalny:



Wzory transformacyjne:

$\Phi_B^1 = \frac{EJ}{l}\left[\alpha'(\sigma)\,\varphi_B\right]$

$\Phi_B^2 = \frac{EJ}{l}\left[\alpha'''(\sigma)\,\varphi_B\right]$

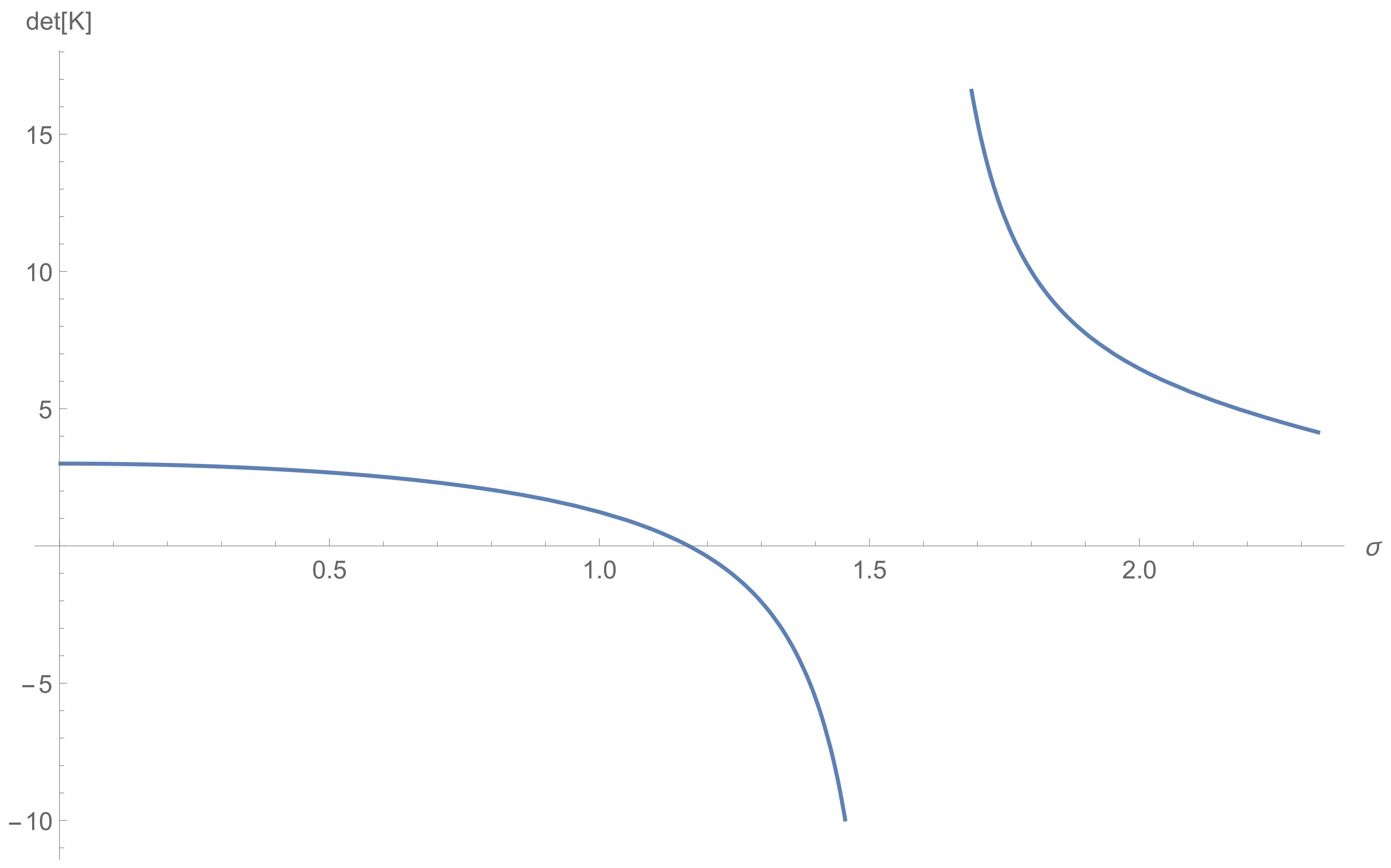
Równania równowagi:

$\Phi_B^1 + \Phi_B^2 = 0$

Macierz sztywności konstrukcji:

$\mathbf{K}(\sigma) = \frac{EJ}{l}\left(\alpha'''(\sigma) + \alpha'(\sigma)\right)$

Wykres wyznacznika macierzy sztywności w zależnosci od parametru σ:



Wyboczenie globalne ramy. Siła krytyczna wynosi $S_{kr} = 1.359\frac{EJ}{l^2}$

Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.