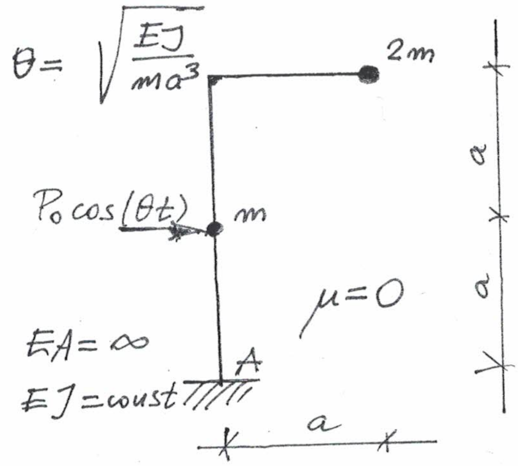
Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji II, 12 IX 2022 r.

NAZWISKO imię				
Grupa	Data zaliczenia ćwiczeń		Numer albumu	
Ocena zadania 1	Ocena zadania 2	Ocena zadania 3	Ocena z egzaminu (po egz. ustnym)	Ocena łączna Data

Zadanie 1

Masa danej ramy
jest skoncentrowana w dwu węzłach.
Rama jest poddana
obciążeniu harmonicznemu jak na rysunku.
Zapisać równania określające amplitudę
Reakcji poziomej w utwierdzeniu A.

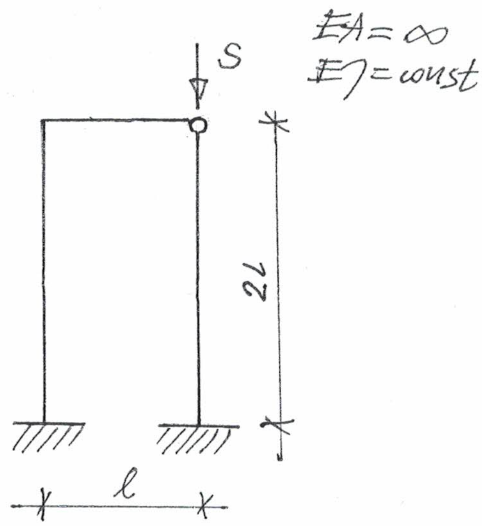
(The mass of the given frame is concentrated at two nodes. The frame is subject to the harmonic load, see the figure. Write down the equations Which make it possible to compute the amplitude of the horizontal reaction at the clamped support A.)



Zadanie 2

Dana jest rama płaska obciążona
dużą siłą osiową S, jak na rys.
Zapisać równania
utraty stateczności całej ramy.

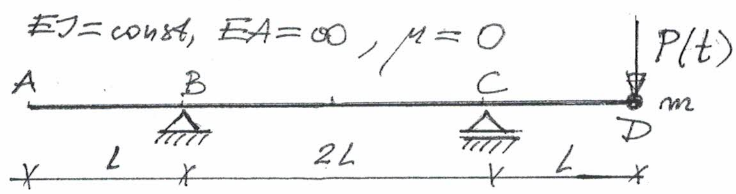
(Given is the frame subject to a big axial force S, see the figure. Write down the stability equations of the whole frame).



Zadanie 3

Dana jest belka nieważka
z masą skupioną w D, obciążona jak na rys.
Siła P_o jest przyłożona nagle w chwili t=0.
Przyjąć jednorodne warunki początkowe.
Znaleźć przemieszczenie węzła A
w dowolnej chwili czasu.

(Given is the weightless beam with a concentrated mass at D, loaded as in the figure. The force P_o is applied suddenly at time instant t=0. Compute the displacement of the node A at arbitrary time instant).

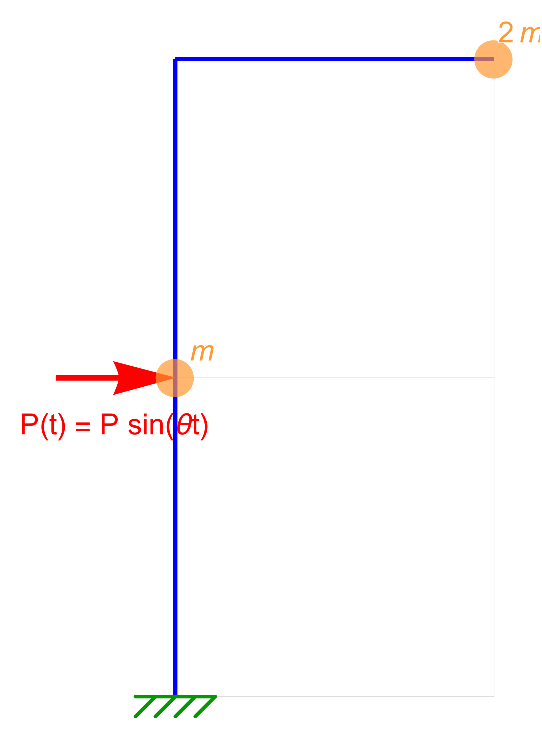


$$P(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ P_0 & t > 0 \end{cases}$$

Egzamin MK2/MoS2, Zadanie 1

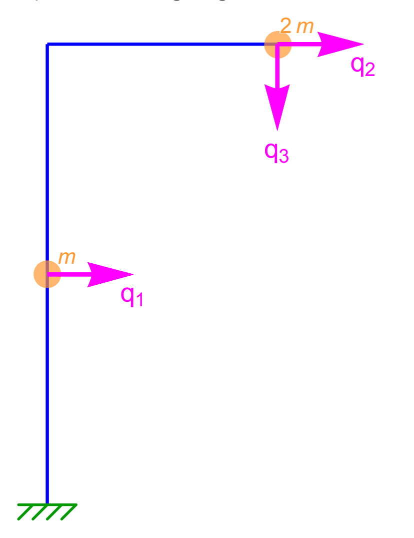
Zapisać równania określające amplitudę reakcji poziomej w utwierdzeniu.

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki - l, $\theta=\sqrt{\frac{EJ}{l^3 m}}$):

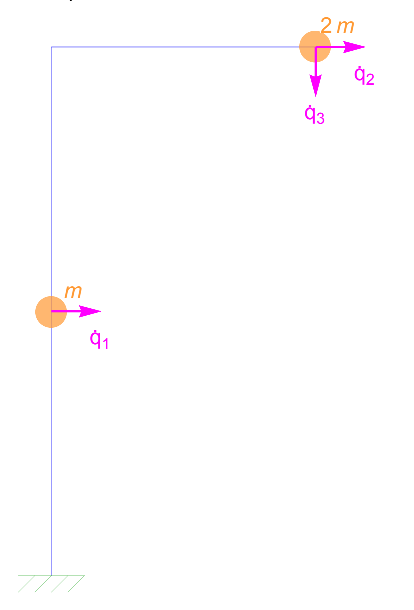


Zadanie statyki konstrukcji jest statycznie wyznaczalne.

Współrzędne Lagrange'a:



Plan predkosci:



Energia kinetyczna jako forma kwadratowa wektora $\dot{\mathbf{q}}$:

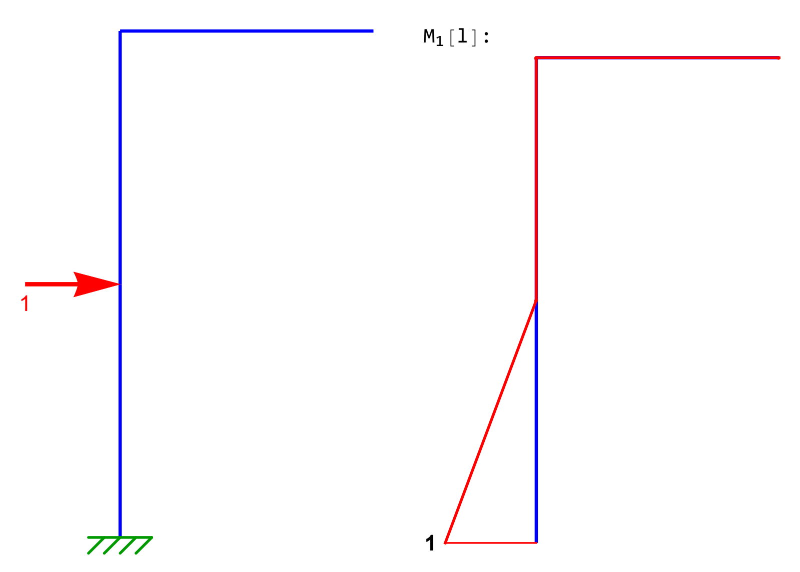
$$2\,E_k\,(\dot{\mathbf{q}}) = m\,\dot{q}_1^2 + 2\,m\,[\,\dot{q}_3^2 + \dot{q}_2^2\,] = m\,\dot{q}_1^2 + 2\,m\,\dot{q}_2^2 + 2\,m\,\dot{q}_3^2 = \dot{\mathbf{q}}^T\,\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{q}}$$

Macierz mas:

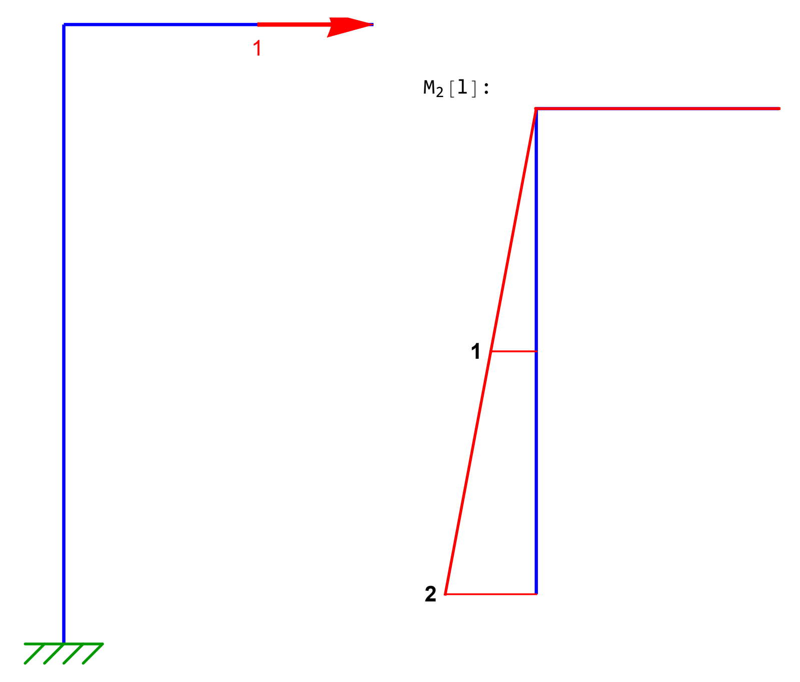
$$\mathbf{M} = m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Wykresy momentów zginających od jednostkowych sił bezwładności:

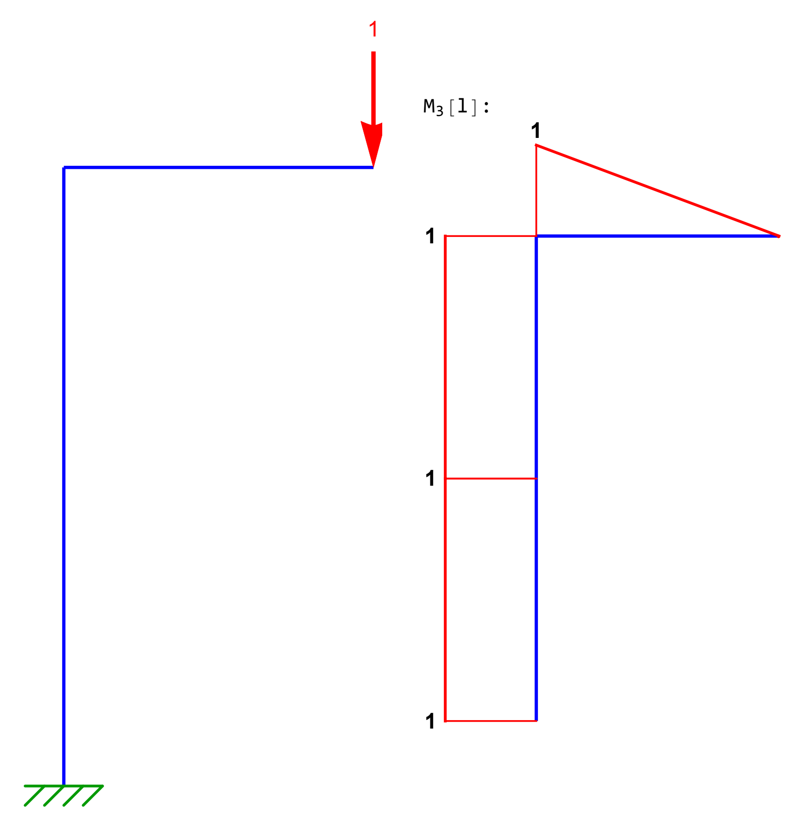
- od q_1:



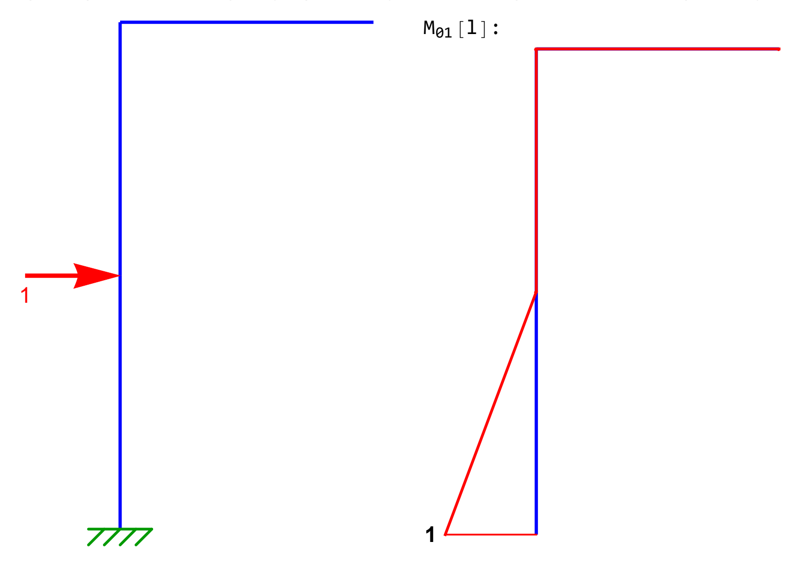
- od q_2:



- od q_3:



Wykresy momentów zginających od jednostkowego obciążenia wymuszającego:



Macierz podatności:

$$d_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_1 = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{12} = d_{21} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2l+\frac{1}{3}\cdot l\right)\right]_1 = \frac{5}{6}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{13} = d_{31} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)(l)\right]_1 = \frac{1}{2}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{22} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2l+\frac{1}{3}\cdot l\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\left(\frac{1}{3}\cdot 2l+\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_2 = \frac{8}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{23} = d_{32} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot l\right)(l)+\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)(l)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)(l)\right]_2 = 2\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{33} = \frac{1}{EJ}\left[(l\cdot l)(l)\right]_1 + \frac{1}{EJ}\left[(l\cdot l)(l)\right]_2 + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_3 = \frac{7}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbf{D} = \frac{l^3}{EJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&\frac{1}{2}\\\frac{5}{6}&\frac{8}{3}&2\\\frac{1}{2}&2&\frac{7}{3}\end{pmatrix}$$

Przemieszczenia od jednostkowego obciążenia wymuszającego:

$$d_{10} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right]_1 = \frac{1}{3}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{20} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2l+\frac{1}{3}\cdot l\right)\right]_1 = \frac{5}{6}\frac{l^3}{EJ}$$

$$d_{30} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\right)(l)\right]_1 = \frac{1}{2}\frac{l^3}{EJ}$$

ZADANIE DRGAŃ HARMONICZNYCH

- poszukiwanie funkcji przemieszczeń postaci:

$$\mathbf{q}\,(t) = \mathbf{a}\,\sin(\theta\,t) = \mathbf{a}\,\sin\left(\left(\frac{EJ}{l^3\,m}\right)^{0.500} t\right)$$

- równania ruchu:

$$(\,\mathbf{I} - \theta^2\,\mathbf{D}\,\mathbf{M}\,)\,\mathbf{a} = \mathbf{d_0}\,P$$

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} - 1.0000\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{5}{6}&\frac{1}{2}\\\frac{5}{6}&\frac{8}{3}&2\\\frac{1}{2}&2&\frac{7}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right)\mathbf{a} = \frac{l^3\,P}{EJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{5}{3}&-1\\-\frac{5}{6}&-\frac{13}{3}&-4\\-\frac{1}{2}&-4&-\frac{11}{3}\end{pmatrix}\mathbf{a} = \frac{l^3\,P}{EJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{5}{6}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

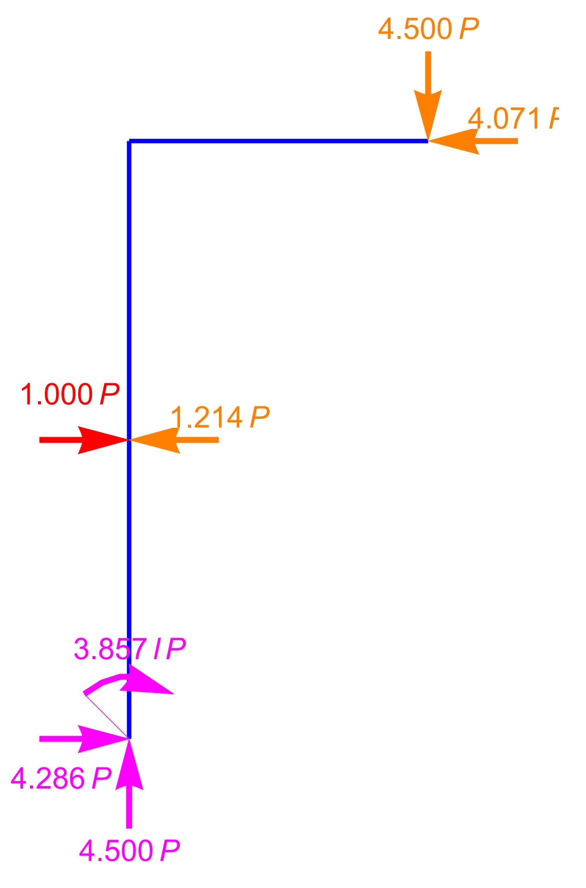
Wektor amplitud przemieszczeń:

$$\mathbf{a} = \frac{l^3\,P}{EJ}\begin{pmatrix}-1.214\\-2.036\\2.250\end{pmatrix}$$

Wektor prac wirtualnych sił bezwładności:

$$\hat{\mathbf{B}} = \theta^2\,\mathbf{M}\,\mathbf{a} = \frac{EJ}{l^3\,m}\,m\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\frac{l^3\,P}{EJ}\begin{pmatrix}-1.214\\-2.036\\2.250\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}-1.214\\-4.071\\4.500\end{pmatrix}$$

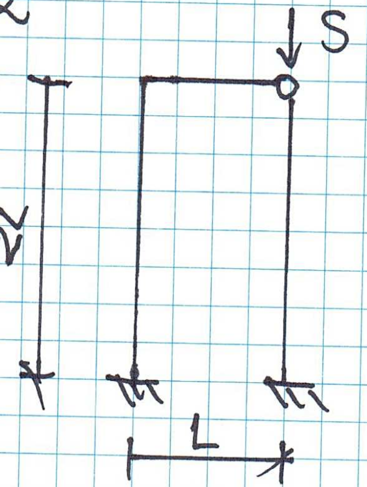
Amplitudy sił działających na konstrukcje:



Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.

ZAD. 2. EGZAMIN MK 2 12.09.2022 r.

1/2

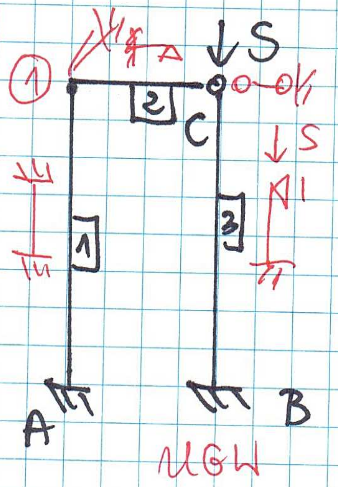


$EJ = const$

$EA \to \infty$

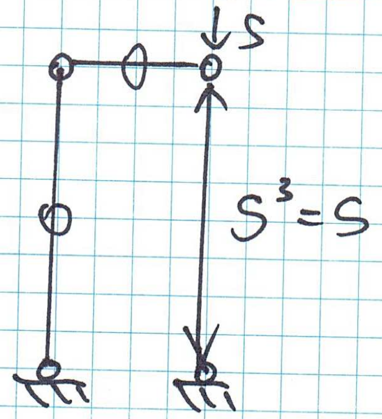
$S_{kr} = ?$

$\sigma = L\sqrt{\frac{S}{EJ}}$

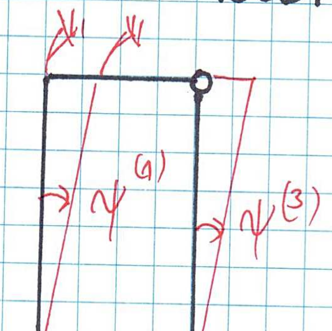


$\psi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \psi \end{bmatrix}$

ROZKŁAD SIŁ S



PLAN PRZEMIESZCZEŃ



$\psi^{(1)} = \psi$

$\psi^{(3)} = \psi^{(1)} = \psi$

$l^{(1)} = 2L$	EJ	$S^{(1)} = 0$	$\sigma^{(1)} = 0$	$\psi^{(1)} = \psi$
$l^{(2)} = L$		$S^{(2)} = 0$	$\sigma^{(2)} = 0$	$\psi^{(2)} = 0$
$l^{(3)} = 2L$		$S^{(3)} = S$	$\sigma^{(3)} = 2\sigma$	$\psi^{(3)} = \psi$

RÓWNANIA RÓWNOWAGI

1) $\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow \phi_1^{\,1} + \phi_1^{\,2} = 0$

2) $(\phi_A^{\,1} + \phi_1^{(1)})\bar{\psi} + \phi_B^{(3)} \cdot \bar{\psi} + S \cdot 2L \cdot \psi \cdot \bar{\psi} = 0$

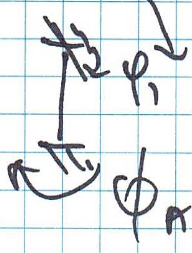
ZAD. 2 MK2 12.09.2022

2/2 $\bar{\psi} = 1 \Rightarrow 2)\ -\phi_A^{1} - \phi_1^{1} - \phi_B^{3} - S \cdot 2l \cdot \psi =$

$$S = \frac{\sigma^2 EJ}{l^2}$$

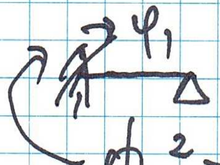
to 2) $-\phi_A^{1} - \phi_1^{1} - \phi_B^{3} - 2\sigma^2 \frac{EJ}{l} \psi = 0$

Wzory transformacyjne

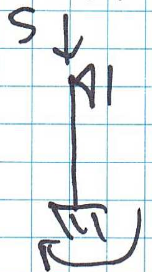


$$\phi_1^{1} = \frac{2EJ}{2l}\left[2\varphi_1 - 3\psi\right] = \frac{EJ}{l}\left[2\varphi_1 - 3\psi\right]$$

$$\phi_A^{1} = \frac{2EJ}{2l}\left[\varphi_1 - 3\psi\right] = \frac{EJ}{l}\left[\varphi_1 - 3\psi\right]$$



$$\phi_1^{2} = \frac{3EJ}{l}\varphi_1 = \frac{EJ}{l} 3\varphi_1$$



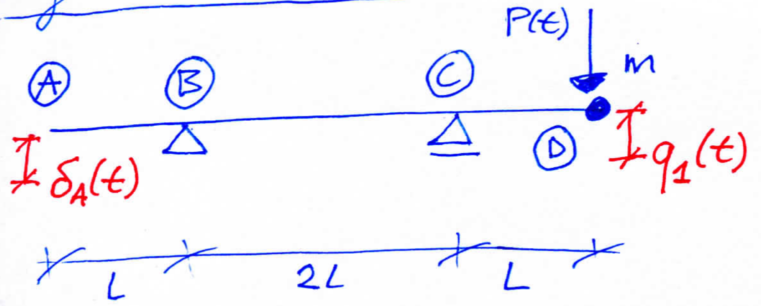
$$\phi_B^{3} = \frac{EJ}{2l}\left[\alpha'(2\sigma)(-\psi)\right] = \frac{EJ}{l}\left[-\frac{\alpha'(2\sigma)}{2}\psi\right]$$

$$\frac{EJ}{l}\begin{bmatrix} 2+3 & -3 \\ -2-1 & +3+3+\frac{\alpha'(2\sigma)}{2} - 2\sigma^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

War. do wyznaczenia siły krytycznej

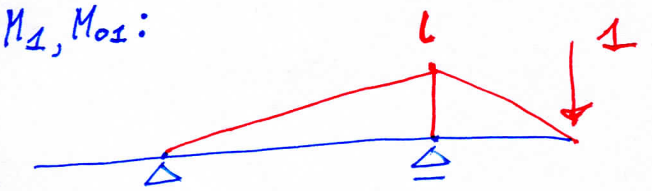
$$\det\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 6+\frac{\alpha'(2\sigma)}{2} - 2\sigma^2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \sigma_{kr} \Rightarrow S_{kr}$$

Egzamin MK2/MoS2 12.09.2022r, Zadanie 3



$$P(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ P_0 & t > 0 \end{cases}$$

M_1, M_{01}:



$$d_{11} = \int_{BELKA} \frac{M_1 M_1}{EJ} dx = \ldots = \frac{L^3}{EJ}$$

$$d_{10} = \int_{BELKA} \frac{M_1 M_{01}}{EJ} dx = d_{11} = \frac{L^3}{EJ}$$

Równanie ruchu masy:

$$q_1(t) = -d_{11} m \ddot{q}_1(t) + d_{10} P(t)$$

$$\iff \ddot{q}_1(t) + \omega^2 q_1(t) = \overbrace{\frac{d_{10}}{d_{11}}}^{=1} \frac{P(t)}{m}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{d_{11} m}} = \sqrt{\frac{EJ}{mL^3}}$$

Metoda całki Duhamela:

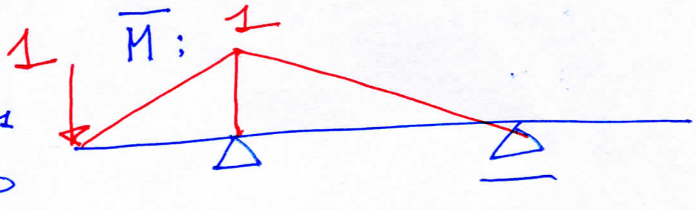
$$q_1(t) = \overset{0}{u_0} \cos(\omega t) + \frac{\overset{0}{V_0}}{\omega} \sin(\omega t) + \int_0^t \frac{P(\tau)}{m\omega} \sin(\omega(t-\tau)) d\tau$$

$$= \frac{P_0}{m\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) d\tau = \left\{ \begin{aligned} s &= \omega(t-\tau) \\ d\tau &= -\frac{ds}{\omega} \end{aligned} \right\} = -\frac{P_0}{m\omega^2} \int_{\omega t}^{0} \sin s \, ds$$

$$= \frac{P_0}{m\omega^2} \cos s \Big|_{\omega t}^{0} = \frac{P_0}{m\omega^2}\left(1 - \cos(\omega t)\right) = \frac{P_0 L^3}{EJ}\left(1 - \cos(\omega t)\right)$$

Przemieszczenie węzła A od siły jednostkowej w D

$$\delta_{A1} = \int_{BELKA} \frac{\overline{M} M_{01}}{EJ} dx = \ldots = \frac{1}{3} \frac{L^3}{EJ} = \frac{1}{3} \delta_{11} = \frac{1}{3} d_{10}$$



Ostatecznie

$$\delta_A(t) = \left(-m \cdot \ddot{q}_1(t) + P(t)\right) \cdot \delta_{A1} = \frac{1}{3}\left(-d_{11} m \ddot{q}_1(t) + d_{10} P(t)\right)$$

$$= \frac{1}{3} q_1(t) = \frac{1}{3} \frac{P_0 L^3}{EJ}\left(1 - \cos(\omega t)\right).$$

Rozwiązanie przygotował:
Karol Bołbotowski