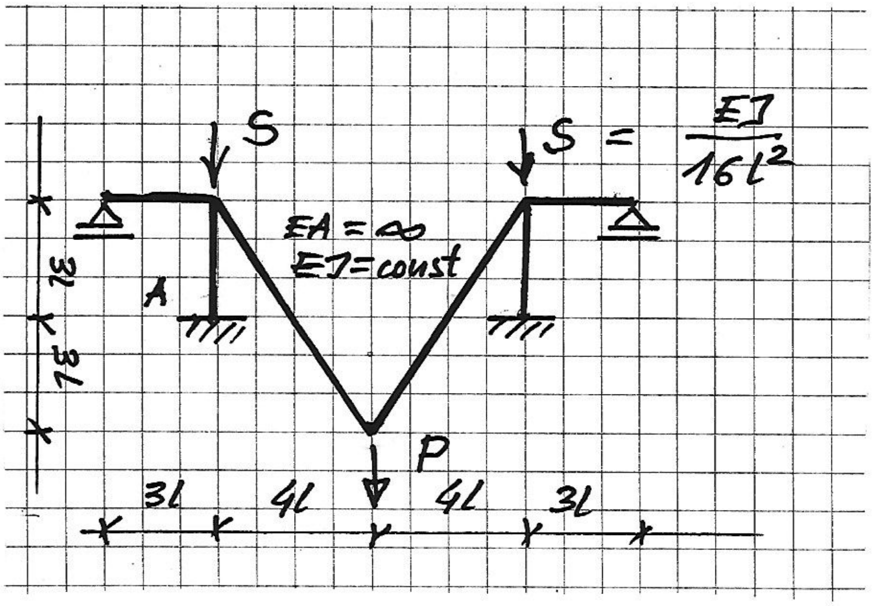
Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji II, 27 VI 2018 roku.

NAZWISKO imię				
Grupa	Data zaliczenia ćwiczeń		Numer albumu	
Ocena zadania 1	Ocena zadania 2	Ocena zadania 3	Ocena z egzaminu po egz. pisemnym	Ocena łączna Data

Zadanie/Problem 1

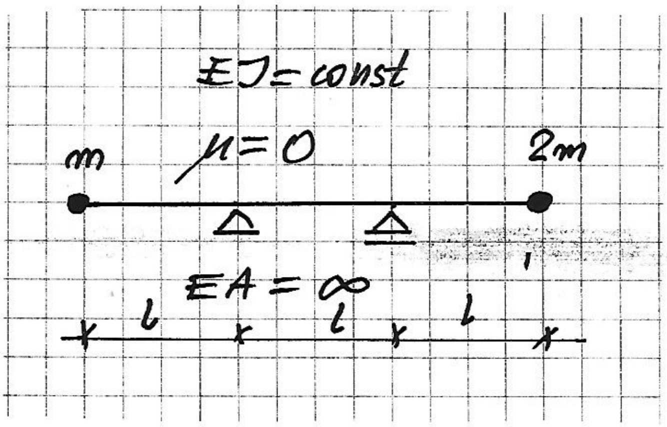
Dana jest rama z prętów niewydłużalnych o stałej sztywności EJ, poddana dużym siłom osiowym. Znaleźć moment w utwierdzeniu A.
[The frame made from inextensible bars, of the constant bending stiffness EJ, is subject to the big axial forces as shown in the figure. Find the bending moment at the clamped edge at A.]



Zadanie/ Problem 2

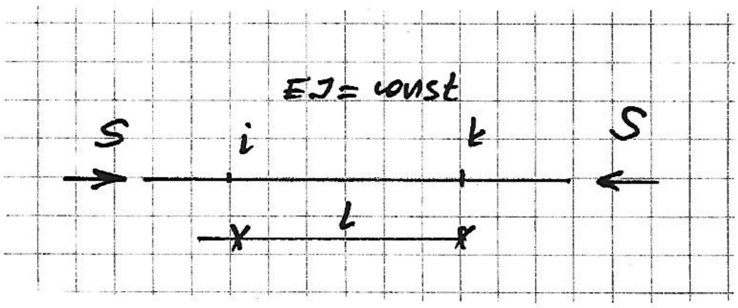
Znaleźć częstości drgań własnych oraz postacie drgań własnych. Wykazać ortogonalność postaci drgań.

[Compute the eigenfrequencies and construct the eigenmodes. Check the orthogonality condition of the eigenmodes].



Zadanie 3

Naszkicować wyprowadzenie wzoru transformacyjnego metody przemieszczeń określającego moment w przekroju "i"
(*Outline the derivation of the slope deflection equation of the displacement method which determines the bending moment at the cross section 'i'.)*

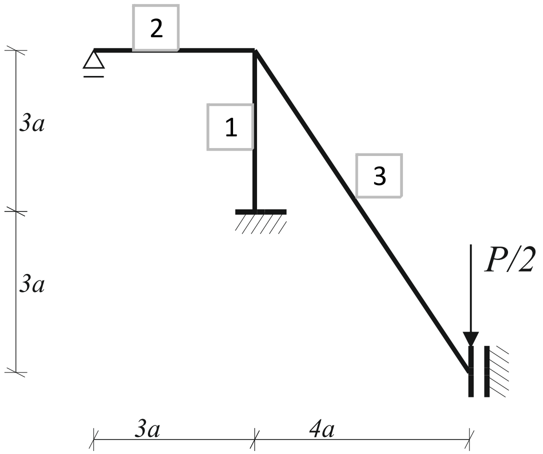


zad. 1/egz.MK2/27.06.2018

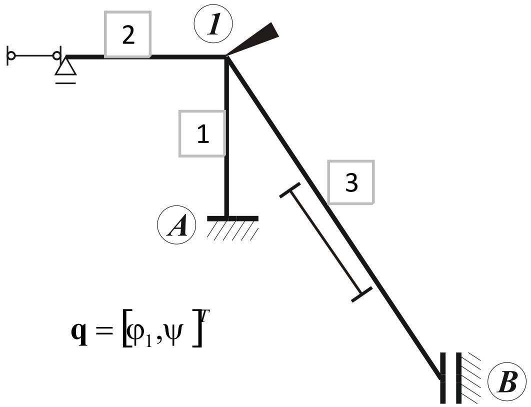
Schemat połówkowy zadania:

$S_1=S=EJ/16a^2$

$S_2=S_3=0$



UGW:



$\mathbf{q}=[\varphi_1,\psi]^T$

Plan P.:

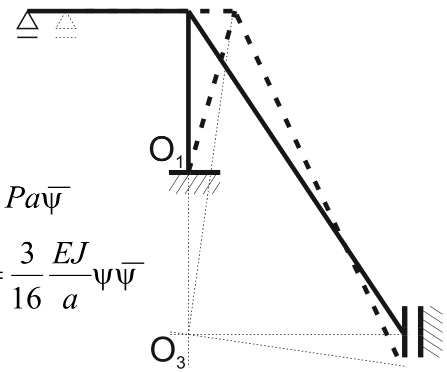
$\psi_1=\psi$

$\psi_2=0$

$\psi_3=\dfrac{\psi}{2}$

$\overline{L}_z=\dfrac{P}{2}4a\dfrac{\overline{\psi}}{2}=Pa\overline{\psi}$

$\overline{L}_S=S3a\psi\overline{\psi}=\dfrac{3}{16}\dfrac{EJ}{a}\psi\overline{\psi}$



Równania równowagi:

1. $\Phi_1^1+\Phi_1^2+\Phi_1^3=0$

2. $\big|_{\overline{\psi}=-1}\quad (\Phi_A^1+\Phi_1^1)(-1)+(\Phi_1^3+\Phi_B^3)\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{3}{16}\dfrac{EJ}{a}\psi-Pa=0$

Wzory transformacyjne / $\sigma_1=0.75$, $\sigma_2=\sigma_3=0$

σ_i		$\phi 1$	ψ	=	Φ_{ik}/Pa
0.75	FA1	0.673027	-1.981174		-0.6492
0.75	F11	1.308147	-1.981174		-0.4057
	F12	1			0.3835
	F13	0.5547	-0.416025		0.0222
	FB3	0.27735	-0.416025		-0.0842

Układ równań:

$\dfrac{EJ}{a}$			Pa
2.8628	-2.3972	=	
-2.3972	4.1909	=	1

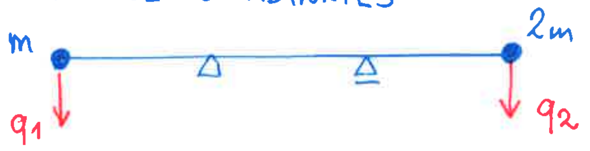
Rozwiazanie UR:

3.835E-01	$=\varphi_1$	$\left[\dfrac{Pa^2}{EJ}\right]$
4.580E-01	$=\psi$	

opracc. K. Hetmański

ZADANIE 2 / PROBLEM 2

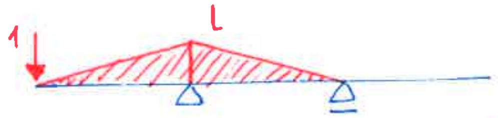
WSPÓŁRZĘDNE LAGRANGE'A / LAGRANGE COORDINATES



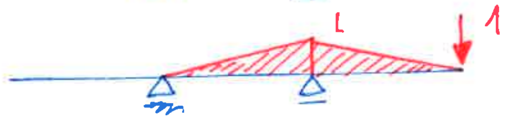
$$\mathbb{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \dot{q}_2^2$$

M_1



M_2



$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} m$$

$$d_{11} = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ}$$
$$d_{12} = \frac{1}{6} \frac{l^3}{EJ}$$
$$d_{22} = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \frac{l^3}{EJ} \qquad \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbb{I} - \omega^2 \mathbb{D}\mathbb{M})\mathbb{q} = \mathbb{0}$$

Szukamy takiej ω, że / We're looking for such ω, that:

$$\det(\mathbb{I} - \omega^2 \mathbb{D}\mathbb{M}) = \mathbb{0}$$

$$\det\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \frac{l^3}{EJ} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} m\right\} = 0 \qquad \text{niech / let} \quad x = \omega^2 \frac{ml^3}{EJ}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{3}x & -\frac{1}{3}x \\ -\frac{1}{6}x & 1 - \frac{4}{3}x \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{6}x^2 - 2x + 1 = 0$$

CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH
EIGENFREQUENCIES

$$x_1 = 0{,}710 \Rightarrow \boxed{\omega_1 = 0{,}843\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}}$$
$$x_2 = 1{,}690 \Rightarrow \boxed{\omega_2 = 1{,}300\sqrt{\frac{EJ}{ml^3}}}$$

POSTACI DRGAŃ WŁASNYCH / EIGENMODES:

I: $\omega = \omega_1$

$$1 - \frac{2}{3}(\omega_1)^2 q_1 - \frac{1}{3}(\omega_1)^2 q_2 = 0 \qquad \text{niech } q_1 = 1 \Rightarrow q_2 = 2{,}225$$

$$\mathbb{q}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}225 \end{bmatrix} q_1$$

II: $\omega = \omega_2$

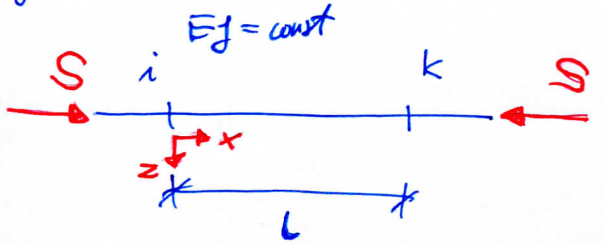
$$1 - \frac{2}{3}(\omega_2)^2 q_1 - \frac{1}{3}(\omega_2)^2 q_2 = 0; \qquad \text{niech / let: } q_1 = 1 \Rightarrow q_2 = -0{,}225$$

$$\mathbb{q}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}225 \end{bmatrix} q_1$$

WARUNEK ORTOGONALNOŚCI / ORTHOGONALITY CONDITION

$$(\mathbb{q}^1)^T \mathbb{M} \mathbb{q}^2 = 0 \qquad [1,\ 2{,}225]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}225 \end{bmatrix} \approx -0{,}001$$

Egzamin MK II 27.06.2018 Zadanie 3



Przemieszczeniowe równanie równowagi w zmiennej bezwymiarowej $\xi = \frac{x}{L}$:

$$EJ \cdot \frac{1}{L^4}\frac{d^4 w}{d\xi^4}(\xi) + S \cdot \frac{1}{L^2}\frac{d^2 w}{d\xi^2}(\xi) = 0$$

$$\Downarrow$$

$\boxed{\sigma = L\sqrt{\frac{S}{EJ}}}$

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4}(\xi) + \sigma^2 \frac{d^2 w}{d\xi^2}(\xi) = 0$$

warunki brzegowe:

$w(0) = w_i$ $\quad w(1) = w_k$

$\varphi(0) = \varphi_i$ $\quad \varphi(1) = \varphi_k$

Całka ogólna równania:

$$w(\xi) = C_0 + \sigma \cdot C_1 \xi + C_2 \cdot \cos(\sigma\xi) + C_3 \cdot \sin(\sigma\xi)$$

$$w'(\xi) = \sigma \cdot C_1 - \sigma \cdot C_2 \cdot \sin(\sigma\xi) + \sigma \cdot C_3 \cdot \cos(\sigma\xi)$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{L}\frac{dw}{d\xi}(\xi) = \frac{1}{L} w'(\xi)$$

Warunki brzegowe jeszcze raz:

$$\left.\begin{aligned}
w(0) = w_i &\Rightarrow C_0 + C_2 = w_i \\
\tfrac{1}{L} w'(0) = \varphi_i &\Rightarrow \sigma C_1 + \sigma C_3 = L \cdot \varphi_i \\
w(1) = w_k &\Rightarrow C_0 + \sigma C_1 + C_2 \cos(\sigma) + C_3 \sin(\sigma) = w_k \\
\tfrac{1}{L} w'(1) = \varphi_k &\Rightarrow \sigma C_1 - \sigma C_2 \sin(\sigma) + \sigma C_3 \cos(\sigma) = \varphi_k
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

dostajemy stałe C_0, C_1, C_2, C_3 oraz podstawiamy $\psi := \frac{w_k - w_i}{L}$

Mając stałe C_0, C_1, C_2, C_3, a więc funkcję w, obliczamy:

$$M(\xi) = EJ \cdot \varkappa(\xi) \;;\quad \varkappa(\xi) = -\frac{1}{L^2}\frac{d^2 w}{d\xi^2}(\xi) \Rightarrow$$

$$M(\xi) = -\frac{EJ}{L^2}\left(-\sigma^2 C_2 \cos(\sigma\xi) - \sigma^2 C_3 \sin(\sigma\xi)\right)$$

Znakowanie M: $M(0)$ $M(1)$

Znakowanie Φ: Φ_i Φ_k

odczytujemy α, β, ϑ przez porównanie współczynników

czyli:

$$\Phi_i = M(0) = \frac{EJ}{L}\left(\frac{\sigma^2}{L} \cdot C_2\right) = \frac{EJ}{L}\left(\alpha(\sigma) \cdot \varphi_i + \beta(\sigma)\varphi_k - \vartheta(\sigma)\psi\right)$$