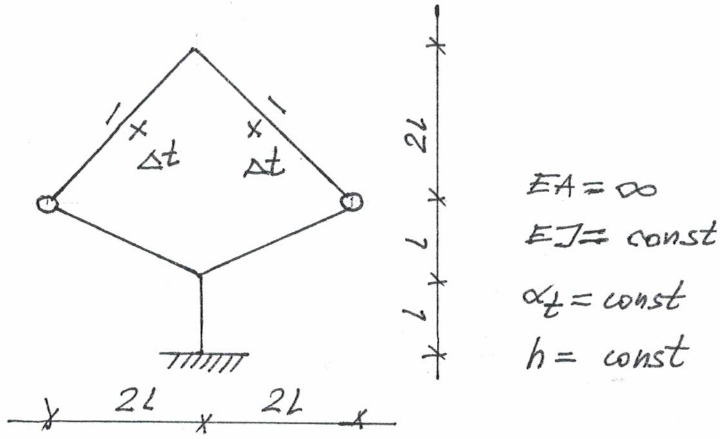
Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji I, 2 IX 2022 r.

NAZWISKO imię				
Grupa	Data zaliczenia ćwiczeń		Numer albumu	
Ocena zadania 1	Ocena zadania 2	Ocena zadania 3	Ocena z egzaminu (po egz. ustnym)	Ocena łączna Data

Zadanie 1

Dana jest rama płaska obciążona jak na rysunku. Sporządzić wykres momentów zginających metodą sił.

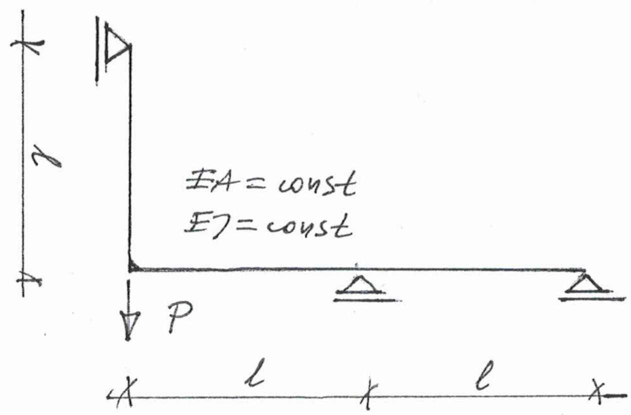
(Given is the frame loaded as shown in the figure. Construct the diagram of the bending moments)



Zadanie 2

Dana jest rama płaska jak na rysunku. Utworzyć układ równań macierzowej metody przemieszczeń.

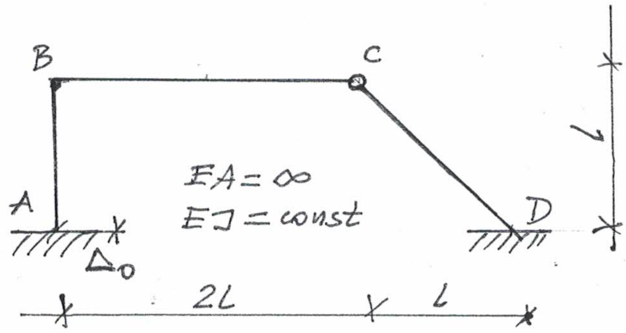
(Given is the plane frame, as in the figure; write down the equations of the displacement method in the matrix form)



Zadanie 3

Dana jest rama płaska, obciążona kinematycznie jak na rysunku. Skonstruować linię ugięcia pręta BC

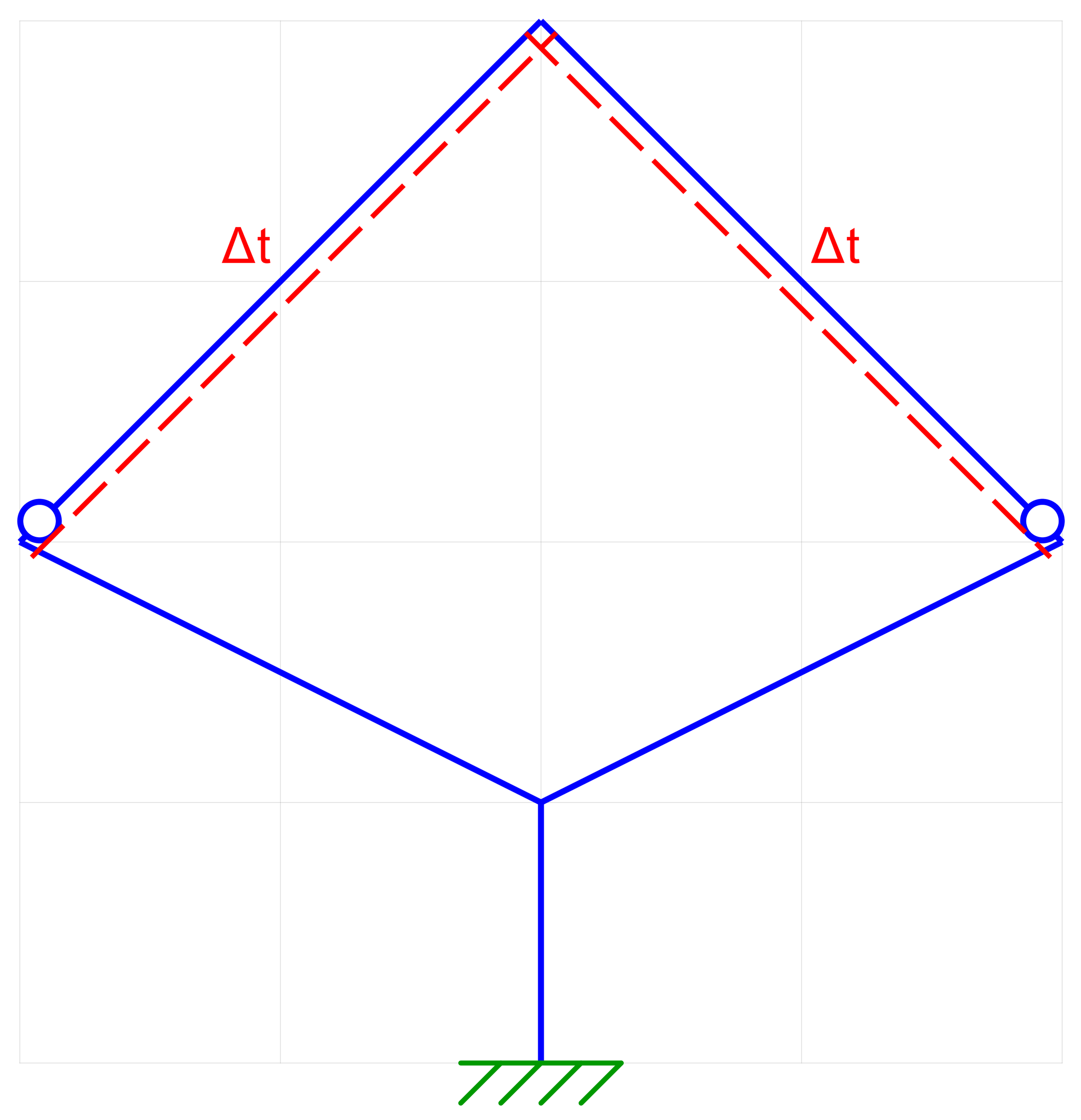
(Given is a plane frame, kinematically loaded cf the figure; construct the deflection function of the bar BC)



Egz. MK1/MoS1 2.09.2022, Zadanie 1.

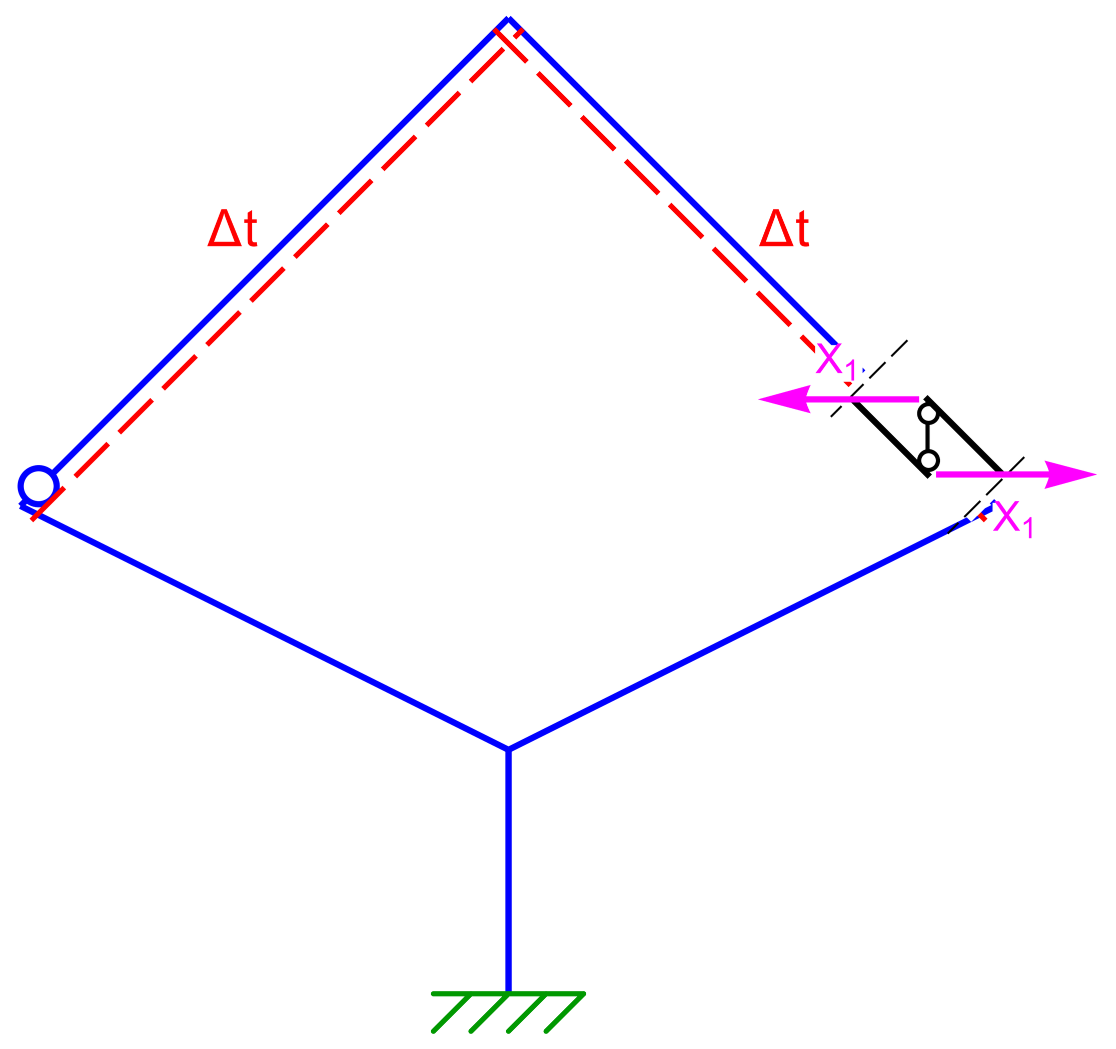
Sporządzić wykres momentów zginających metodą sił.

Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – 1, EA $=\infty$):



Konstrukcja jest 1 krotnie statycznie niewyznaczalna.

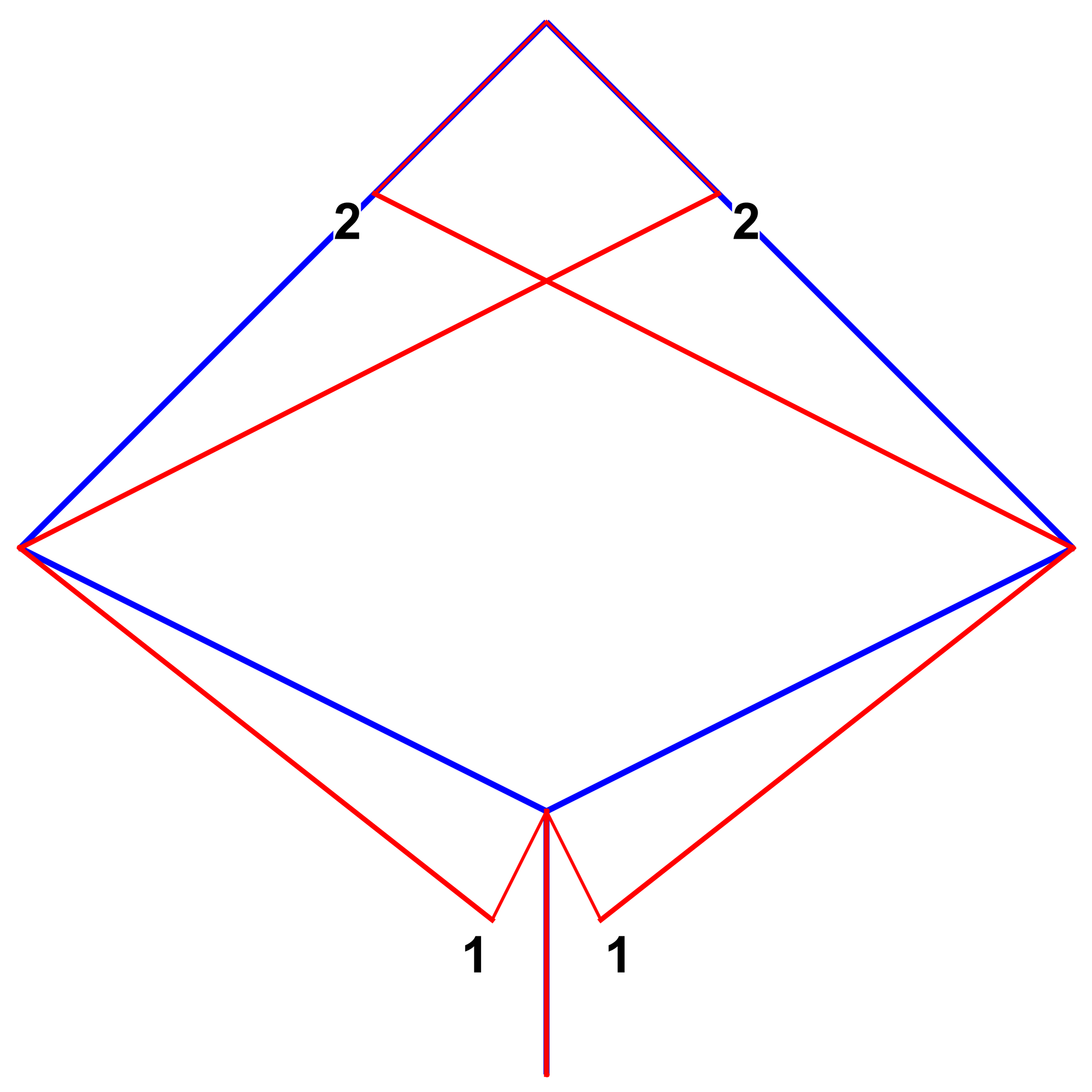
Układ zastępczy:



Wykresy sił wewnętrznych od jednostkowych sił nadliczbowych:

– od siły $X_1 = 1$:

$M_1[1]$:



Przemieszczenia od obciążenia temperaturą:

$$\delta_{10}^{t} = \left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2\sqrt{2}\,l\right)\left(\frac{\alpha\Delta t}{h}\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2\sqrt{2}\,l\right)\left(\frac{\alpha\Delta t}{h}\right) = 5.657\frac{l^2\alpha\Delta t}{h}$$

Przemieszczenia od jednostkowych sił nadliczbowych:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\sqrt{5}\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right] + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot l\cdot\sqrt{5}\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot l\right)\right] + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2\sqrt{2}\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2l\right)\right] + \frac{1}{EJ}\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 2l\cdot 2\sqrt{2}\,l\right)\left(\frac{2}{3}\cdot 2l\right)\right] = 9.033\frac{l^3}{EJ}$$

Równania nierozdzielności:

$$(\delta_{11})(X_1) + (\delta_{10}^{t}) = (0)$$

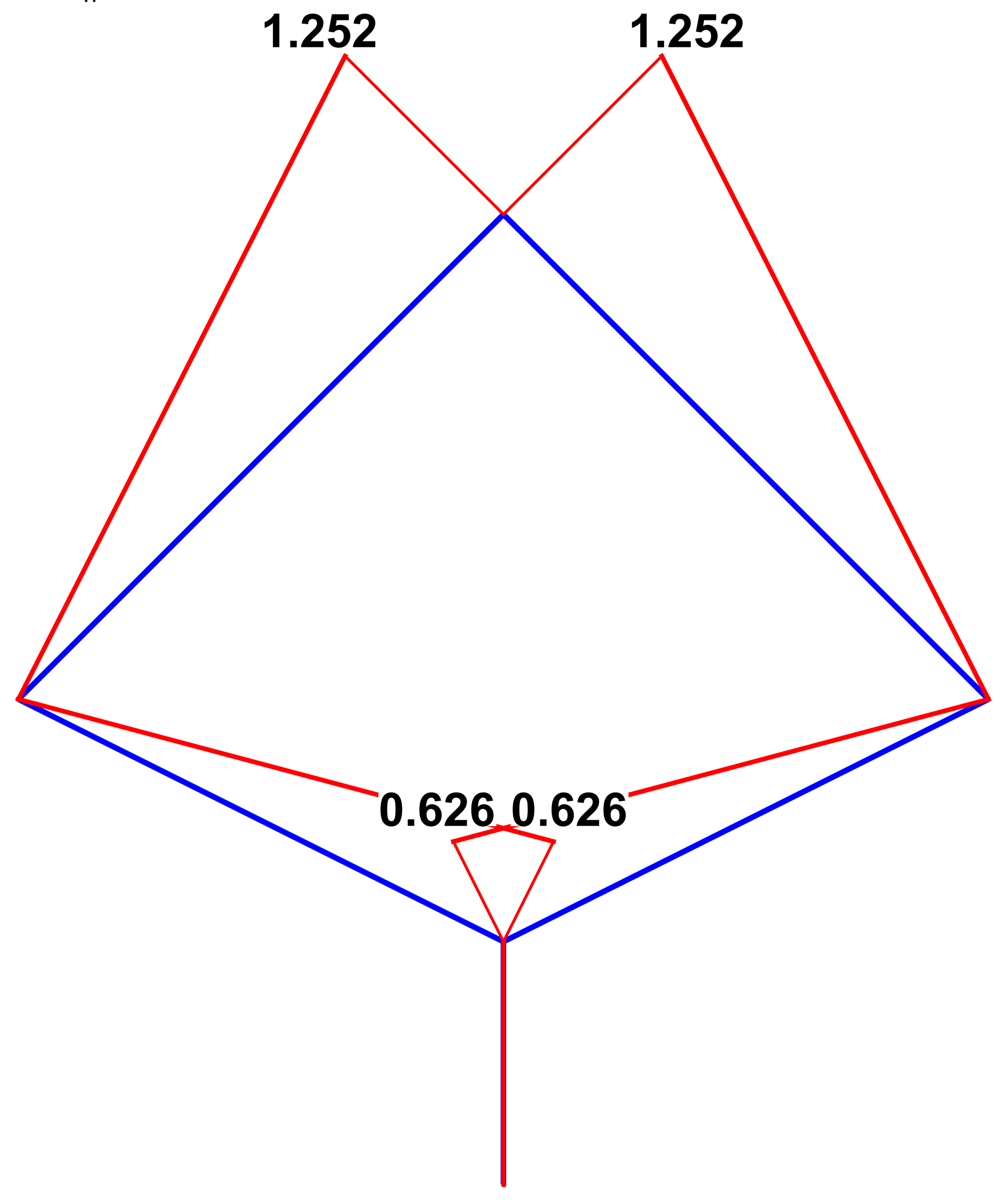
$$\left(\frac{9.033\,l^3}{EJ}\right)(X_1) + \left(\frac{5.657\,l^2\alpha\Delta t}{h}\right) = (0)$$

Rozwiązanie metody sił:

$$(X_1) = \left(-\frac{0.626\,EJ\,\alpha\Delta t}{h\,l}\right)$$

Wykresy sił wewnętrznych:

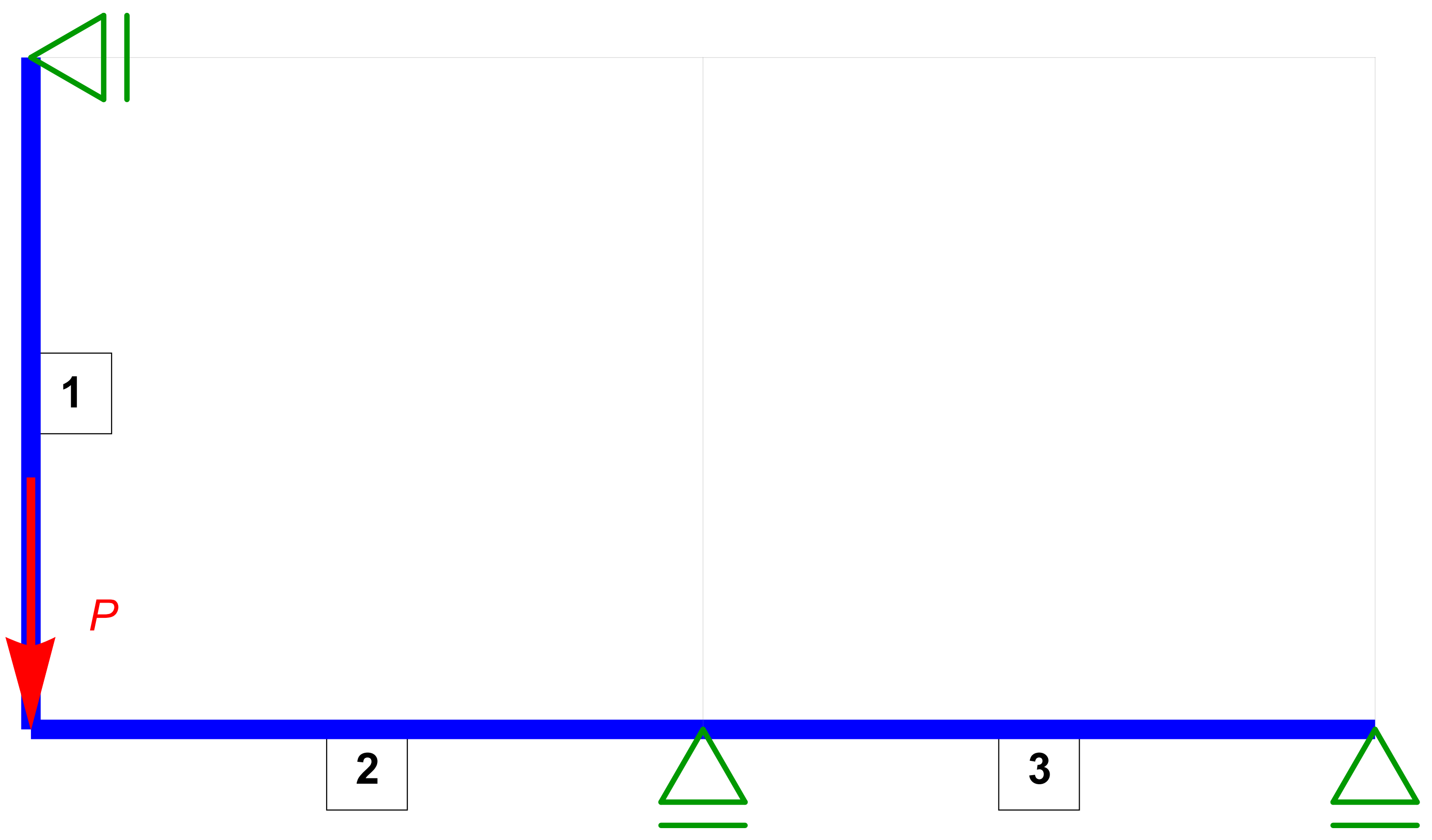
$M\left[\frac{EJ\,\alpha\Delta t}{h}\right]$:



Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.

Egz. MK1/MoS1 2.09.2022, Zadanie 2.

Ułożyć układ równań macierzowej metody przemieszczeń.



Niewiadome kinematyczne:

Ustalono 9 niewiadomych kinematycznych.

Równania geometryczne kratownicy (Δ, ${}^*\chi$, χ^* – wektory odkształceń prętów; B, ${}^*\beta$, β^* – macierze geometryczne):

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{B}\,\mathbf{q}$$

$$^*\boldsymbol{\chi} = {}^*\boldsymbol{\beta}\,\mathbf{q}$$

$$\boldsymbol{\chi}^* = \boldsymbol{\beta}^*\,\mathbf{q}$$

czyli:

$$\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\\ q_5\\ q_6\\ q_7\\ q_8\\ q_9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}{}^*\chi_1\\ {}^*\chi_2\\ {}^*\chi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\\ q_5\\ q_6\\ q_7\\ q_8\\ q_9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\chi_1^*\\ \chi_2^*\\ \chi_3^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\\ q_3\\ q_4\\ q_5\\ q_6\\ q_7\\ q_8\\ q_9\end{pmatrix}$$

Związki konstytutywne ramy (N, ${}^*\Phi$, Φ^* – wektory sił w prętach; E, D – macierze konstytutywne):

$$\mathbf{N} = \mathbf{E}\,\mathbf{\Delta}$$

$$^*\mathbf{\Phi} = \mathbf{D}\,(2\,{}^*\boldsymbol{\chi} + \boldsymbol{\chi}^*)$$

$$\mathbf{\Phi}^* = \mathbf{D}\,({}^*\boldsymbol{\chi} + 2\,\boldsymbol{\chi}^*)$$

czyli:

$$\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{EA}{1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{EA}{1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{EA}{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \Delta_2\\ \Delta_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}{}^*\Phi_1\\ {}^*\Phi_2\\ {}^*\Phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2\,EJ}{1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2\,EJ}{1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2\,EJ}{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\,{}^*\chi_1+\chi_1^*\\ 2\,{}^*\chi_2+\chi_2^*\\ 2\,{}^*\chi_3+\chi_3^*\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Phi_1^*\\ \Phi_2^*\\ \Phi_3^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2\,EJ}{1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2\,EJ}{1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{2\,EJ}{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^*\chi_1+2\chi_1^*\\ {}^*\chi_2+2\chi_2^*\\ {}^*\chi_3+2\chi_3^*\end{pmatrix}$$

Równania równowagi ramy (Q – wektor statycznych obciążeń zewnętrznych):

$$\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\,\mathbf{N} + ({}^*\boldsymbol{\beta})^{\mathsf{T}}\,({}^*\mathbf{\Phi}) + (\boldsymbol{\beta}^*)^{\mathsf{T}}\,(\mathbf{\Phi}^*) = \mathbf{Q}$$

czyli:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{1} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{1} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}{}^*\Phi_1\\ {}^*\Phi_2\\ {}^*\Phi_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ \frac{1}{1} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{1} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_1^*\\ \Phi_2^*\\ \Phi_3^*\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -P\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Przemieszczeniowe równanie równowagi ramy:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{q} = \mathbf{Q}$$

gdzie K jest macierzą sztywności, tj.:

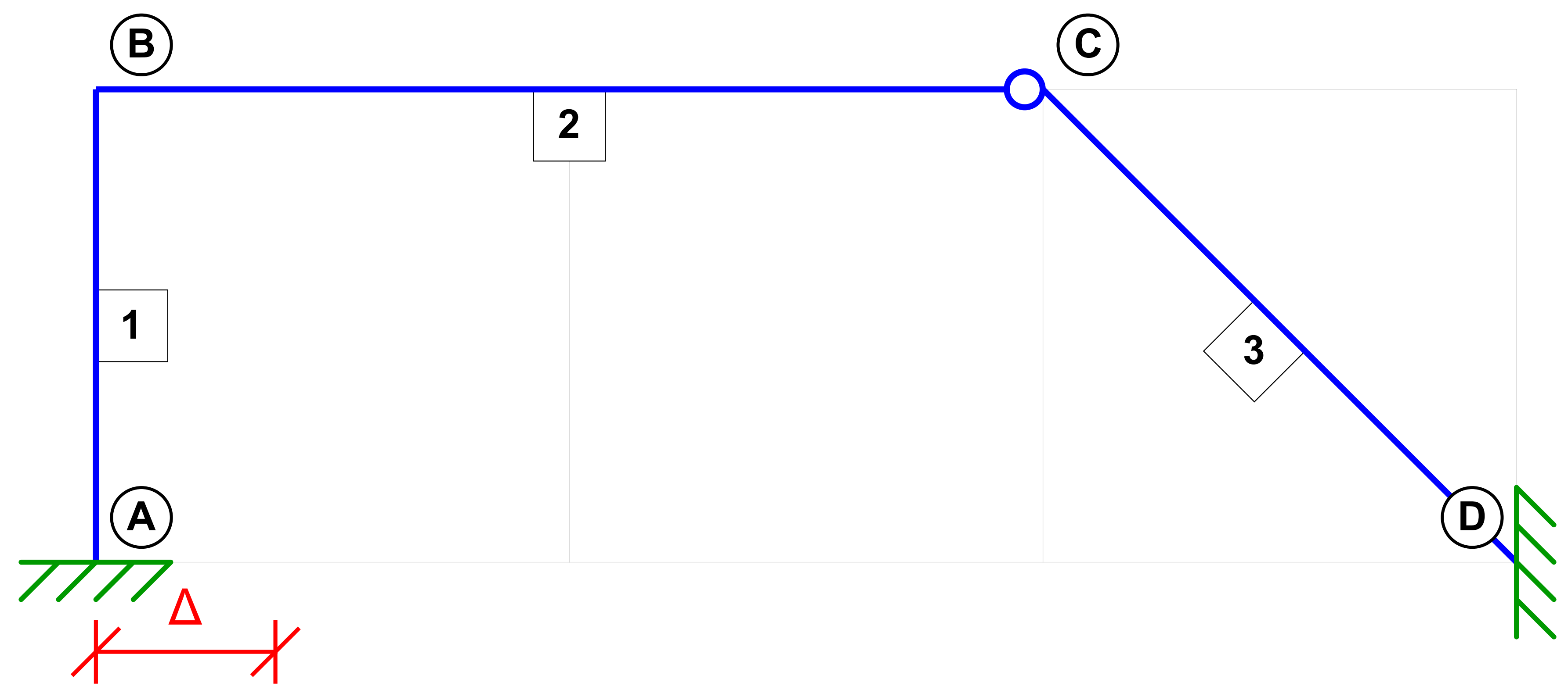
$$\mathbf{K} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{E}\,\mathbf{B} + 2\,({}^*\boldsymbol{\beta})^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\,({}^*\boldsymbol{\beta}) + ({}^*\boldsymbol{\beta})^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\beta}^*) + (\boldsymbol{\beta}^*)^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\,({}^*\boldsymbol{\beta}) + 2\,(\boldsymbol{\beta}^*)^{\mathsf{T}}\mathbf{D}\,(\boldsymbol{\beta}^*)$$

Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.

Egz. MK1/MoS1 2.09.2022, Zadanie 3.

Skonstruować linię ugięcia pręta BC.

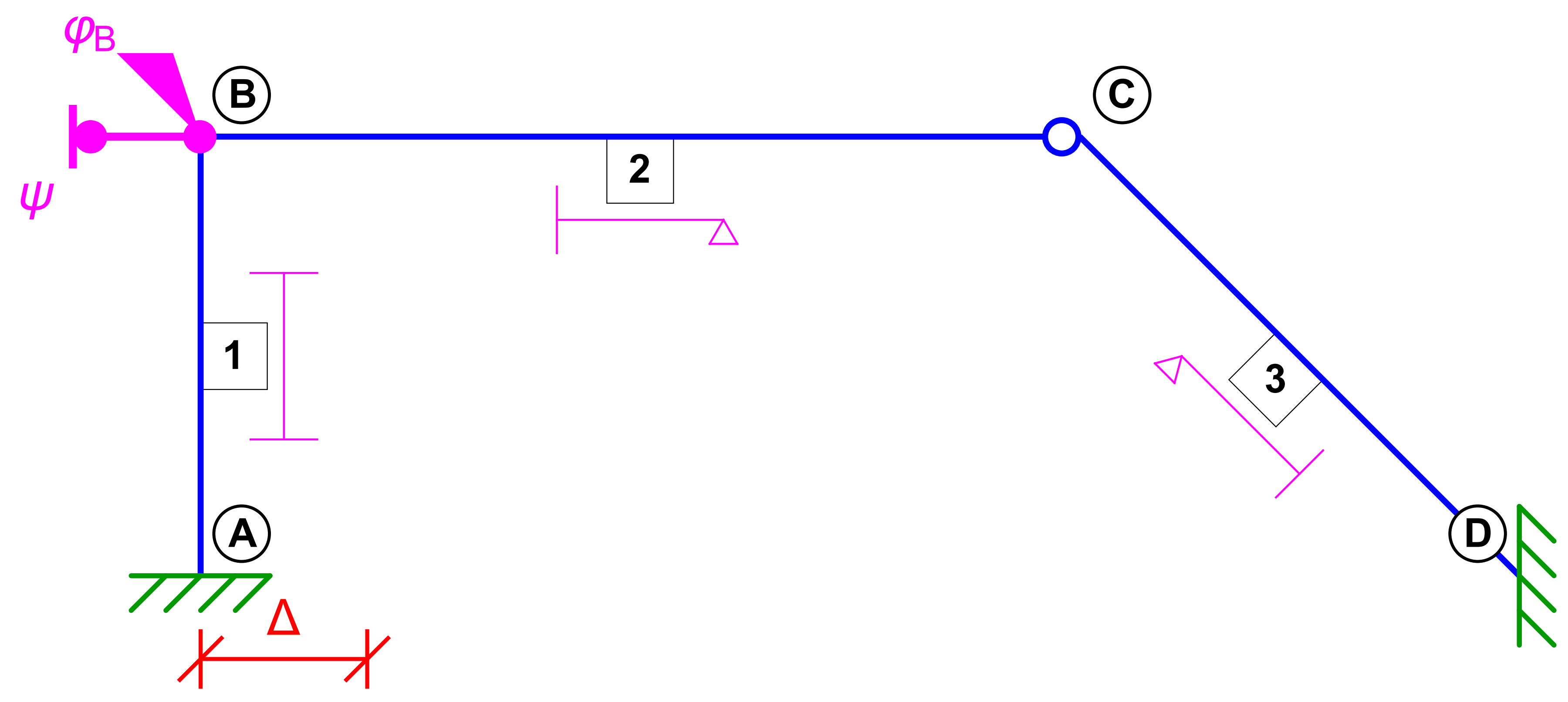
Geometria oraz obciążenia konstrukcji (wymiar oczka siatki – l):



Wektor niewiadomych:

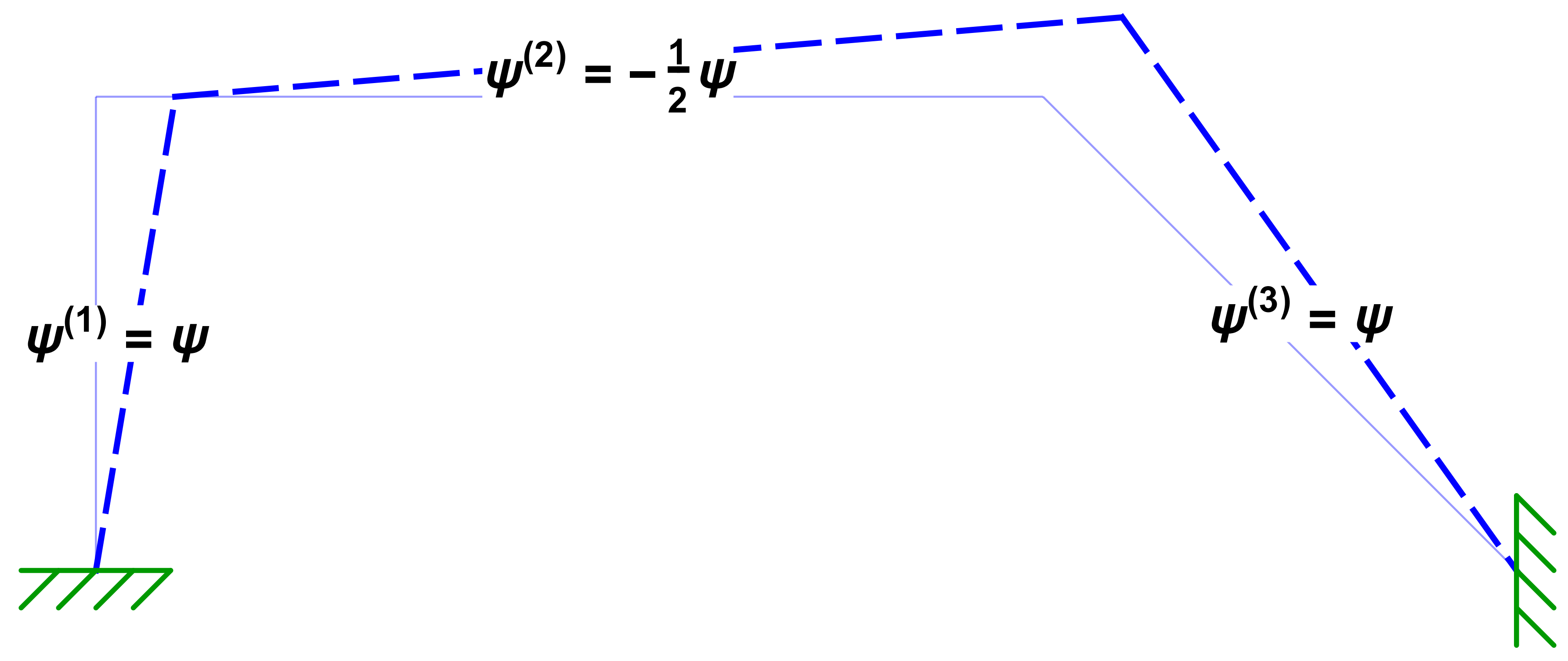
$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi_B \\ \psi \end{pmatrix}$

Układ geometrycznie wyznaczalny:



Plany przemieszczeń:

– plan przemieszczeń ψ:



Wyjściowy plan przemieszczen spowodowany przez obciążenia pozastatyczne w UGW:

Ostateczny plan przemieszczeń:

$\psi^{(1)} = \psi - \frac{\Delta}{l}$

$\psi^{(2)} = -\frac{1}{2}\psi$

$\psi^{(3)} = \psi$

Momenty wyjściowe:

$\Phi_A^{01} = 6\,\frac{EJ\,\Delta}{l^2}$

$\Phi_B^{01} = 6\,\frac{EJ\,\Delta}{l^2}$

Wzory transformacyjne:

$\Phi_A^1 = \frac{EJ}{l}\,[\,2\,\varphi_B - 6\,\psi\,] + 6\,\frac{EJ\,\Delta}{l^2}$

$\Phi_B^1 = \frac{EJ}{l}\,[\,4\,\varphi_B - 6\,\psi\,] + 6\,\frac{EJ\,\Delta}{l^2}$

$\Phi_B^2 = \frac{EJ}{l}\,[\,\frac{3}{2}\,\varphi_B + \frac{3}{4}\,\psi\,]$

$\Phi_D^3 = \frac{EJ}{l}\,[\,-\frac{3}{\sqrt{2}}\,\psi\,]$

Równania równowagi:

$\Phi_B^1 + \Phi_B^2 = 0$

$(\Phi_A^1 + \Phi_B^1)\,\overline{\psi} + \Phi_B^2 \cdot (-\frac{1}{2}\,\overline{\psi}) + \Phi_D^3 \cdot \overline{\psi} = \overline{0}$

$$\frac{EJ}{l}\begin{pmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{21}{4} \\ -\frac{21}{4} & \frac{99}{8} + \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi_B \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{EJ\,\Delta}{l^2}\begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie metody przemieszczeń:

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi_B \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{\Delta}{l}\begin{pmatrix} -0.460 \\ 0.661 \end{pmatrix}$

Warunki brzegowe dla pręta BC:

$w_{BC}(0) = 0$

$w_{BC}(2l) = (-\frac{1}{2}\psi)\cdot 2l = -0.661\Delta$

$\varphi_{BC}(0) = \varphi_B = -0.460\,\frac{\Delta}{l}$

$M_{BC}(2l) = 0$

Linia ugiecia pręa BC:

$w_{BC}(x) = 0. - \frac{0.459635\,x}{l} + \frac{0.0967262\,x^2}{l^2} - \frac{0.016121\,x^3}{l^3}$

Rozwiązanie przygotował Karol Bołbotowski.