

## Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji I, 4 II 2022 r.

NAZWISKO imię				
Grupa	Data zaliczenia ćwiczeń		Numer albumu	
Ocena zadania 1	Ocena zadania 2	Ocena zadania 3	Ocena z egzaminu	Ocena łączna
				Data

Początek: 9.00. Do 9.45 należy opracować zadanie, a do 9.55 przesłać rozwiązanie pod TEAMS  
Na kartce z rozwiązaniem należy napisać:

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu  
Mechanika Konstrukcji została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Imię i nazwisko (czytelnie)

Nr albumu

(czytelnie)

Time slot for solving: 9:00 - 9:45. Time slot for handing in: 9:45 - 9:55

Solution MUST be handed in via MS Teams.

The following declaration on the own completion has to be attached to each solution:

I declare that this piece of work which is the basis for recognition of achieving learning outcomes in the MoS course was completed on my own.

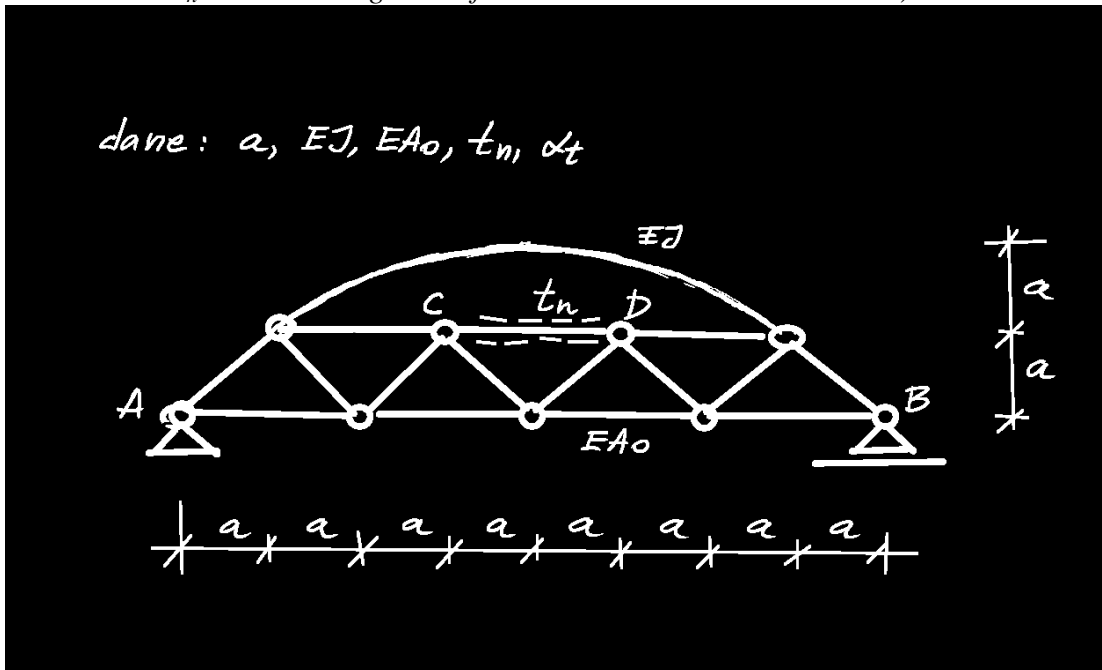
First and last name \_\_\_\_\_

Student record book number (Student ID number) \_\_\_\_\_

### Zadanie 1

Dana jest kratownica z prętów o sztywnościach  $EA_0$ , wzmocniona nieściśliwym łukiem parabolicznym o małej wyniosłości, o sztywności na zginanie  $EJ = \text{const}$ . Pręt CD jest poddany równomiernemu obciążeniu termicznemu  $t_n$ . Znaleźć rozkłady sił wewnętrznych w łuku.

(Given is a truss, of bars' stiffnesses  $EA_0$ , strengthened by the incompressible shallow (i.e. low rise) parabolic arch of constant bending stiffness  $EJ$ . The bar CD is subjected to a uniform thermal load  $t_n$ . Find the diagrams of the stress resultants in the arch.)



## Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji I, 4 II 2022 r.

NAZWISKO imię				
Grupa	Data zaliczenia ćwiczeń		Numer albumu	
Ocena zadania 1	Ocena zadania 2	Ocena zadania 3	Ocena z egzaminu	Ocena łączna
				Data

Początek: 9.55 . Do 10.40 należy opracować zadanie a do 10.50 przesłać rozwiązanie pod TEAMS  
Na kartce z rozwiązaniem należy napisać:

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu  
Mechanika Konstrukcji została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Imię i nazwisko (czytelnie)

Nr albumu

(czytelnie)

Time slot for solving: 9.55-10.40. Time slot for handing in: 10.40-10.50

Solution MUST be handed in via MS Teams.

The following declaration on the own completion has to be attached to each solution:

I declare that this piece of work which is the basis for recognition of achieving learning outcomes in the MoS course was completed on my own.

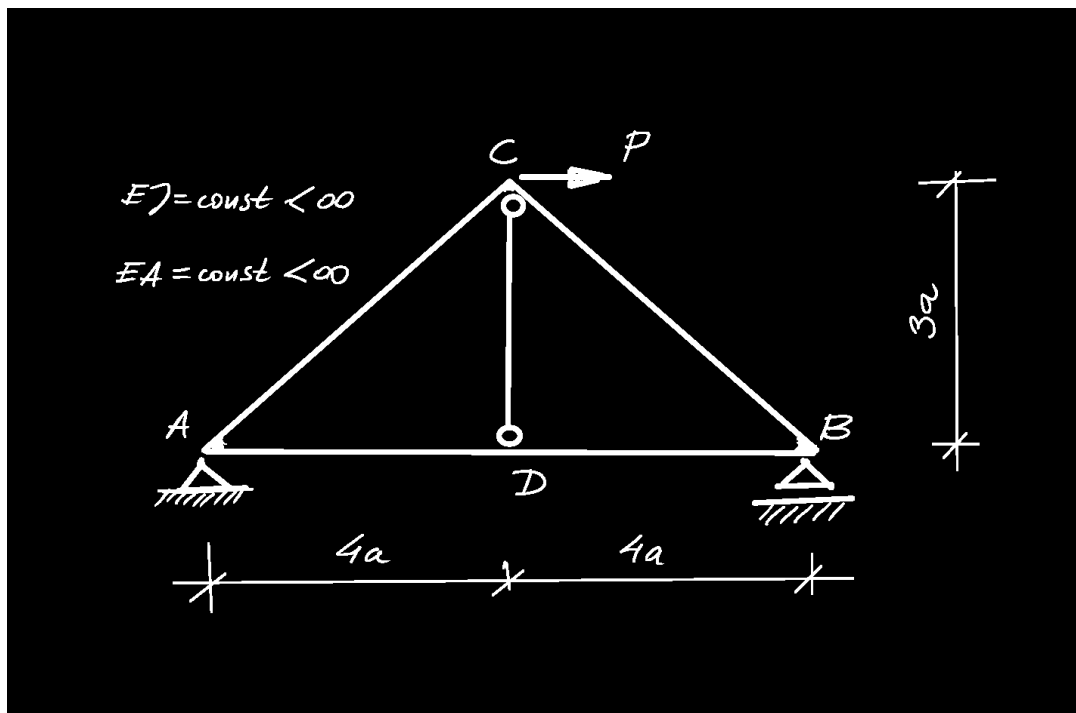
First and last name \_\_\_\_\_

Student record book number (Student ID number) \_\_\_\_\_

### Zadanie 2

Dana jest płaska ramokrata obciążona jak na rysunku. Zapisać układ równań macierzowej metody przemieszczeń.

(Given is the plane frame, see Figure. Write down the equations of the matrix version of the displacement method).



## Egzamin pisemny z Mechaniki Konstrukcji I, 4 II 2022 r.

NAZWISKO imię				
Grupa	Data zaliczenia ćwiczeń		Numer albumu	
Ocena zadania 1	Ocena zadania 2	Ocena zadania 3	Ocena z egzaminu	Ocena łączna
				Data

Początek: 11.05. Do 11.50 należy opracować zadanie a do 12.00 przesłać rozwiązanie pod TEAMS  
Na kartce z rozwiązaniem należy napisać:

Oświadczam, że niniejsza praca stanowiąca podstawę do osiągnięcia efektów uczenia się z przedmiotu  
Mechanika Konstrukcji została wykonana przeze mnie samodzielnie.

Imię i nazwisko (czytelnie)

Nr albumu

(czytelnie)

Time slot for solving: 11:05 - 11:50. Time slot for handing in: 11:50 - 12:00

Solution MUST be handed in via MS Teams.

The following declaration on the own completion has to be attached to each solution:

I declare that this piece of work which is the basis for recognition of achieving learning outcomes in the MoS course was completed on my own.

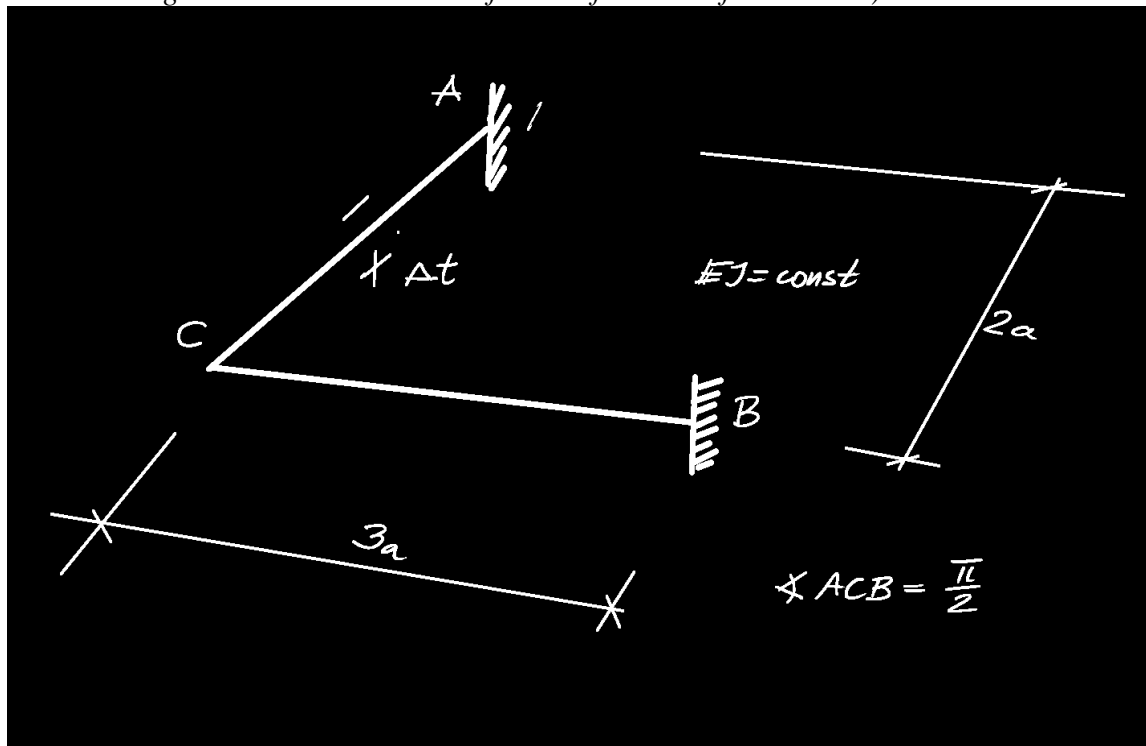
First and last name \_\_\_\_\_

Student record book number (Student ID number) \_\_\_\_\_

### Zadanie 3

Dany jest ruszt przegubowy ( $EJ = \text{const}$ ) obciążony różnicą temperatur na belce AC. Znaleźć linię ugięcia tej belki.

(Given is a system of beams (of constant bending stiffnesses  $EJ$ ) subjected to the thermal load  $\Delta t$  along the bar AC. Find the deflection function of this beam.)

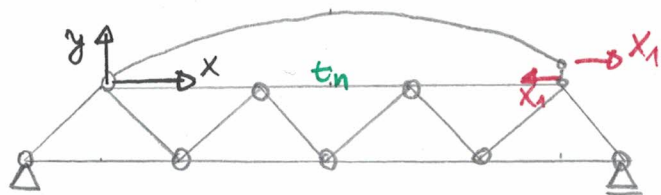


# ZADANIE 1

Równanie łuku

$$y(x) = \frac{4a}{(6a)^2} x(6a-x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}\frac{x^2}{a}$$

USW



$$\operatorname{tg} \varphi(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}\frac{x}{a}$$

$$\sin \varphi(x) = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\cos \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA_0} [3 \cdot 1 \cdot 2a \cdot 1] + \frac{1}{EY} \int_0^{6a} y^2(x) dx = \frac{6a}{EA_0} + \frac{16}{5} \frac{a^3}{EY}$$

$$\delta_{10} = -2 \alpha_t \operatorname{tg} a$$

$$X_1 = \frac{2 \alpha_t \operatorname{tg} a}{\frac{6a}{EA} + \frac{16}{5} \frac{a^3}{EY}}$$

Rozkłady sił wewnętrznych w łuku:

$$M(x) = X_1 M_1(x)$$

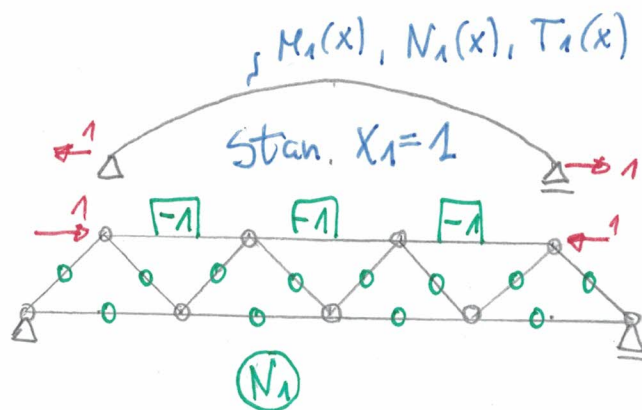
$$N(x) = X_1 N_1(x)$$

$$T(x) = X_1 T_1(x)$$

$$M_1(x) = y(x)$$

$$N_1(x) = 1 \cos \varphi$$

$$T_1(x) = 1 \sin \varphi$$



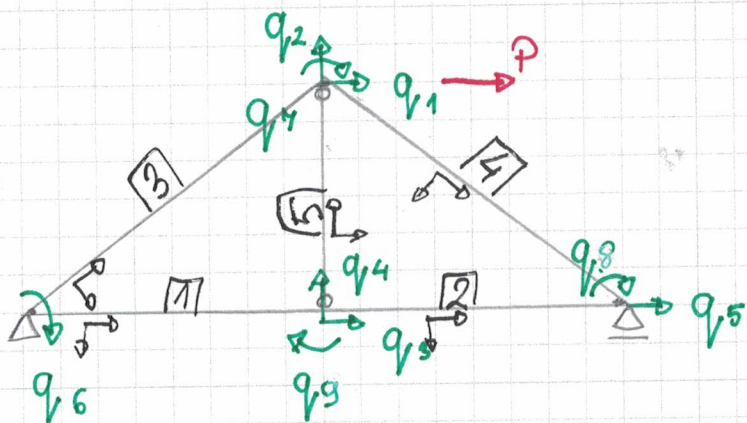
Równanie zgodności

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Opracował: S. Dudziak

# ZADANIE 2



$$EA = \text{const.}$$

$$EY = \text{const.}$$

Wektory kolumnowe niewiadomych i obciążeń węzłowych.

$$q_v = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9]^T$$

$$Q = [P \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Śmigzeli geometryczne

$$\Delta = B q_v$$

$$* \chi = * \beta q_v$$

$$\chi^* = \beta^* q_v$$

Macierze geometryczne

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$* \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4a} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{25a} & \frac{4}{25a} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{25a} & -\frac{4}{25a} & 0 & 0 & \frac{3}{25a} & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\beta^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{25a} & \frac{4}{25a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{25a} & -\frac{4}{25a} & 0 & 0 & \frac{3}{25a} & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze konstytutywne

$$E = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & \frac{1}{5} & 0 \\ & & & & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad D = \frac{E\gamma}{a} \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2}{4} & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{2} & 0 \\ & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności

$$K = B^T E B + 2^* \beta^T D^* \beta + {}^* \beta^T D \beta^* + (\beta^*)^T D^* \beta + 2 (\beta^*)^T D \beta^*$$

Równanie rozwiązyjące

$$K q_f = Q \Rightarrow q_f = K^{-1} Q \rightarrow \text{zw. geometryczne}$$

$\rightarrow$  zw. konstytutywne

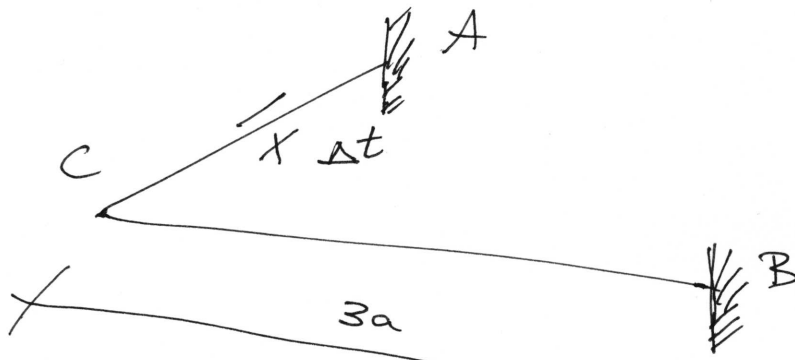
$$N = E \Delta \quad - \text{ siły podłużne}$$

$${}^* \Phi = D (2^* \chi + \chi^*)$$

- momenty brzołowe

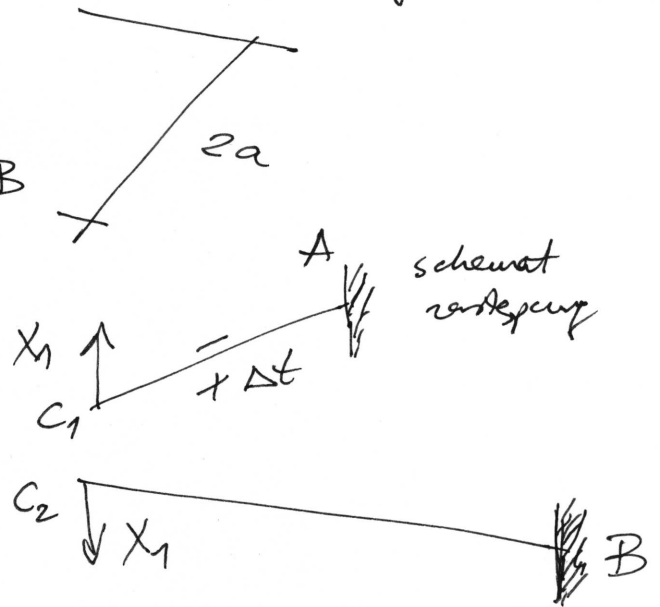
$$\Phi^* = D ({}^* \chi + 2 \chi^*)$$

Rozwiązań: S. Spodzieja

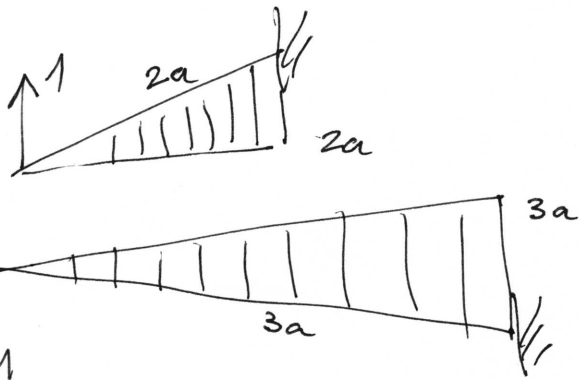


$EJ = \text{const}$   
Rzut przegubowy

znaleźć ugięcie  
belki AC



schemat  
rozbiegany



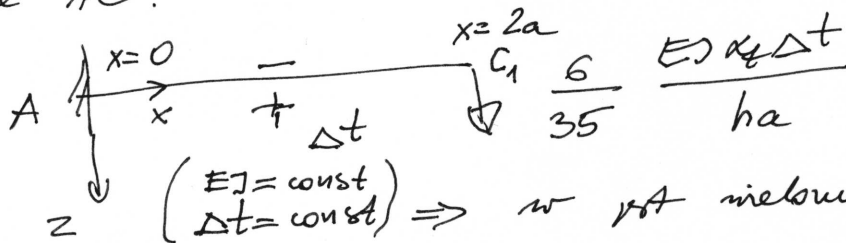
$$J_M = \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a + \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} \cdot 3a \right\} = \frac{35}{3} \frac{a^3}{EJ}$$

$$J_{10} = \int \frac{q \Delta t}{h} M_1 dx = \frac{q \Delta t}{h} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 2a = \frac{2a^2 q \Delta t}{h}$$

po belkach obc. warunkami

$$X_1 = - \frac{J_{10}}{J_M} = - \frac{6}{35} \frac{q \Delta t EJ}{ha}$$

Belka AC:



$(EJ = \text{const}, \Delta t = \text{const}) \Rightarrow$  w pA nieobciążonym 3 stopnia

$$w = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 ; \quad \frac{d^3 w}{dx^3} = 6C_3$$

$$\frac{dw}{dx} = C_1 + 2C_2 x + 3C_3 x^2 ; \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = 2C_2 + 6C_3 x$$

$$\alpha = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -2C_2 - 6C_3 x$$

roz. zad. 3 c.d.  
egz. IV 2022

$$M = EJ \left( \alpha - \frac{\alpha_4 \Delta t}{h} \right) = -EJ \left( 2C_2 + 6C_3 x + \frac{\alpha_4 \Delta t}{h} \right)$$

$$T = -EJ \frac{d^3 w}{dx^3} = -6EJ \cdot C_3$$

Warunki brzegowe:

$$w(0) = 0, \quad \frac{dw}{dx}(0) = 0, \quad M(2a) = 0, \quad T(2a) = \frac{6}{35} \frac{EJ \alpha_4 \Delta t}{ha}$$

Układ równań na sterbe:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0,$$

$$2C_2 + 12C_3 a + \frac{\alpha_4 \Delta t}{h} = 0,$$

$$-6EJ C_3 = \frac{6}{35} \frac{EJ \alpha_4 \Delta t}{ha}$$

Zatem

$$C_2 = -\frac{23}{70} \frac{\alpha_4 \Delta t}{h}, \quad C_3 = -\frac{1}{35} \frac{\alpha_4 \Delta t}{ha}$$

$$w = -\frac{\alpha_4 \Delta t}{h} \left( \frac{23}{70} x^2 + \frac{1}{35} \frac{x^3}{a} \right)$$

wpisze belki AC

Obliczamy

$$w(2a) = w_{C_1} = -\frac{54}{35} \frac{\alpha_4 \Delta t a^2}{h}$$

Obliczamy  $w_{C_2}$  od XF 1

$$w_{C_2} |_{x_1=1} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} 3a = \frac{9a^3}{EJ}$$

$$w_{C_2} |_{x_1} = -\frac{6}{35} \frac{\alpha_4 \Delta t EJ \cdot 9a^3}{ha \cdot EJ} = -\frac{54}{35} \frac{\alpha_4 \Delta t a^2}{h} = w_{C_1}$$

(sprawdzenie)