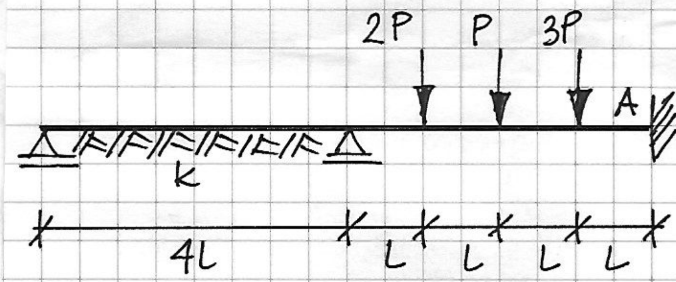
Egzamin z Mechaniki Konstrukcji (MK IPB), 4.02.2017

NAZWISKO, Imię				
rok akademicki zaliczenia ćwiczeń		nr albumu	grupa (IPB / BZ)	tryb studiów (ST / NST)
ocena zadania 1	ocena zadania 2	ocena zadania 3	ocena egzaminu	ocena łączna

Zadanie 1.

$EJ = const.,\qquad k = 0{,}0324\dfrac{EJ}{l^4}$

Oblicz wartości reakcji w podporze A w belce z rys. 1.

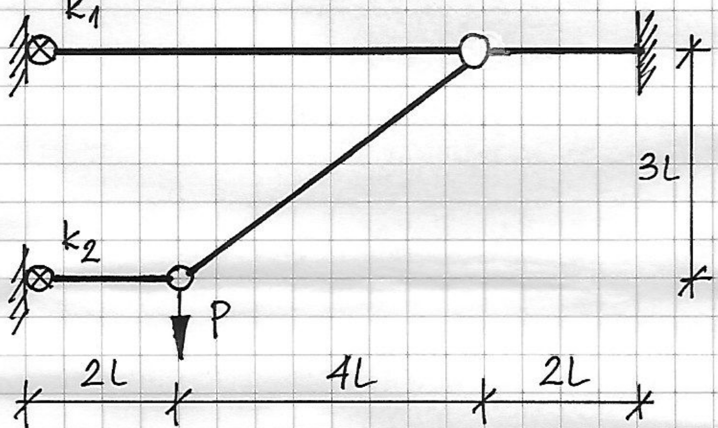


rys. 1

Zadanie 2.

$EJ = const.,\qquad k_1 = 4\dfrac{EJ}{l},\qquad k_2 = 3\dfrac{EJ}{l}$

Korzystając z Metody Przemieszczeń oblicz siłę w pręcie ukośnym ramy z rys. 2



rys. 2

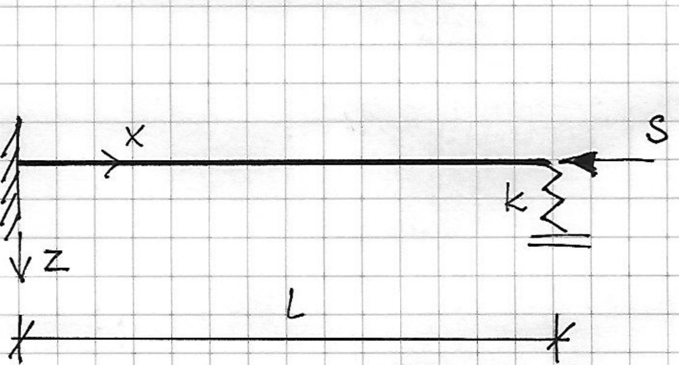
Zadanie 3.

$EJ = const.,\qquad k = 10\dfrac{EJ}{l^3}$

Wyprowadź warunek określający krytyczną wartość siły S w belce z rys. 3.

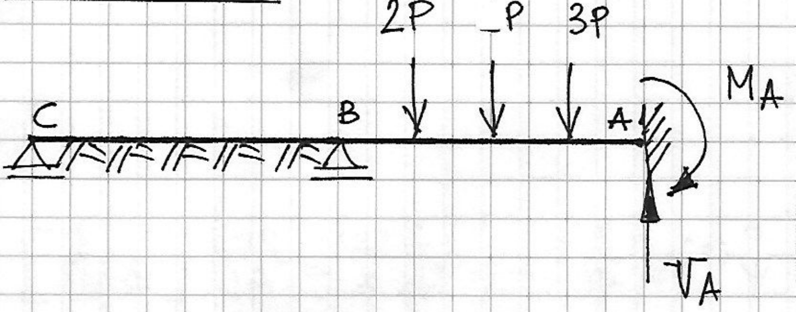
<u>Wskazówka:</u>
Równanie osi odkształconej ma postać
$w(\xi) = A_0 + A_1\sigma\xi + A_2\cos(\sigma\xi) + A_3\sin(\sigma\xi)$
gdzie

$\xi = \dfrac{x}{l}, \sigma = l\sqrt{\dfrac{S}{EJ}}$



rys. 3

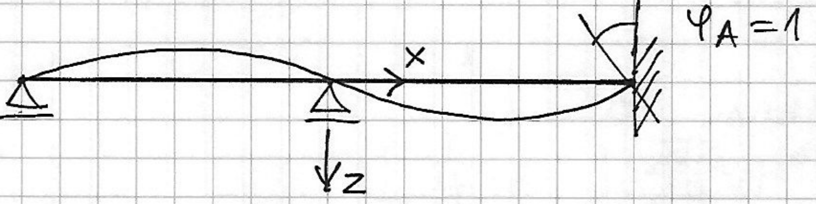
Zadanie 1



$\lambda = 0{,}3$

$\lambda^{(1)} = 4\lambda = 1{,}2$

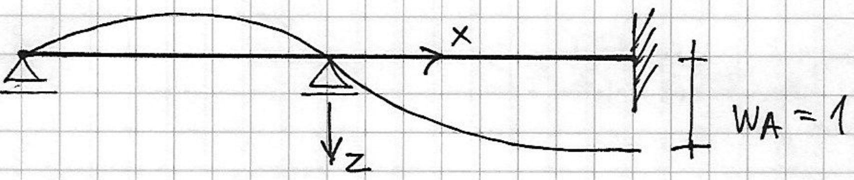
Zadania stowarzyszone w sensie tw. Bettiego polegają na wyznaczeniu linii ugięcia w postaci $w = w(\xi)$



(1A)

$w(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3$

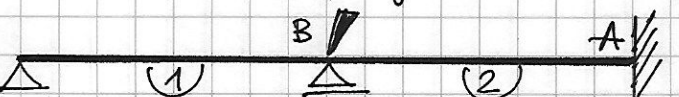
$\xi = \frac{x}{4L}$



(1B)

Zadanie 1A

Schemat zastępczy



$\overset{\circ}{\varphi}_A = -1 \longrightarrow \overset{\circ}{\Phi}{}^{(2)}_B = \frac{2EJ}{4L}\left[-1\right]$

$$\Phi^{(1)}_B + \Phi^{(2)}_B = 0$$

$$\Phi^{(1)}_B = \frac{EJ}{4L}\left[\alpha'(1{,}2)\,\varphi_B\right]$$

$$\Phi^{(2)}_B = \frac{2EJ}{4L}\left[2\varphi_B\right] + \frac{2EJ}{4L}\left[-1\right] = \frac{EJ}{L}\varphi_B - \frac{1}{2}\frac{EJ}{L}$$

$$\frac{EJ}{L}\left[\frac{1}{4}\cdot 3{,}153 + 1\right]\varphi_B - \frac{1}{2}\frac{EJ}{L} = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi_B = 0{,}28$$

Warunki brzegowe funkcji ugięcia na odcinku B–A , $\xi = \frac{x}{4L}$

$w(0) = 0$	$w(0) = 0$	$A_0 = 0$
$\varphi(0) = \varphi_B$	$\frac{1}{4L}w'(0) = \varphi_B$	$A_1 = 1{,}12L$
$w(1) = 0$	$w(1) = 0$	$A_2 = 1{,}76L$
$\varphi(1) = -1$	$\frac{1}{4L}w'(1) = -1$	$A_3 = -2{,}88L$

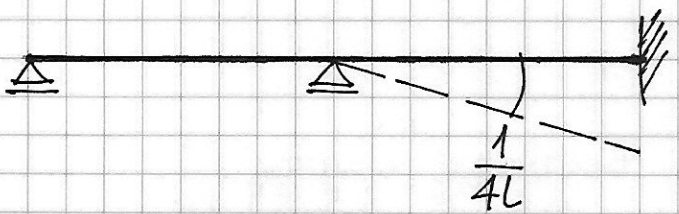
$w(\xi) = \left[-1{,}12\xi + 1{,}76\xi^2 - 2{,}88\xi^3\right]L$

$$M_A = 2P\cdot w\left(\tfrac{1}{4}\right) + P\cdot w\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3P\cdot w\left(\tfrac{3}{4}\right) = 3{,}175\,PL$$

Zadanie 1B

Schemat zastępczy jak w 1A.

"Wyjściowy" plan przesunięć



$$\overset{\circ}{\psi}{}^{(2)} = \frac{1}{4l} \rightarrow \overset{\circ}{\Phi}{}^{(2)}_{B} = \frac{2EJ}{4l}\left[-3\cdot\frac{1}{4l}\right]$$

$$\Phi^{(1)}_{B} + \Phi^{(2)}_{B} = 0$$

$\Phi^{(1)}_{B}$ jak w zadaniu 1A

$$\Phi^{(2)}_{B} = \frac{2EJ}{4l}\left[2\varphi_B\right] + \frac{2EJ}{4l}\left[-3\cdot\frac{1}{4l}\right]$$

$$\frac{EJ}{l}\left[\frac{1}{4}\cdot 3{,}153 + 1\right]\varphi_B - \frac{3}{8}\frac{EJ}{l^2} = 0$$

$$\varphi_B = 0{,}21\cdot\frac{1}{l}$$

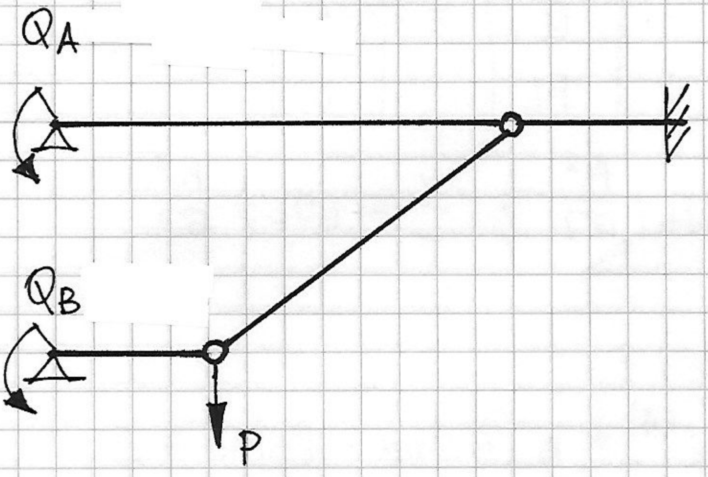
Warunki brzegowe funkcji ugięcia na odcinku B-A

$w(0)=0$	$A_0 = 0$	
$\varphi(0)=\varphi_B$	$A_1 = 0{,}84$	$w(\xi) = 0{,}84\xi + 1{,}32\xi^2 - 1{,}16\xi^3$
$w(1)=1$	$A_2 = 1{,}32$	
$\varphi(1)=0$	$A_3 = -1{,}16$	

$$V_A = 2P\cdot w\left(\tfrac{1}{4}\right) + P\cdot w\left(\tfrac{1}{2}\right) + 3P\cdot w\left(\tfrac{3}{4}\right) = 3{,}803P$$

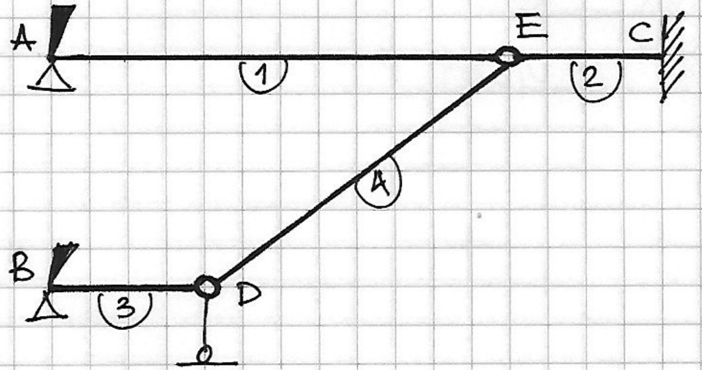
Zadanie 2

Usuwamy podpory sprężyste zastępując je reakcjami, które są znakowane zgodnie z teorią.



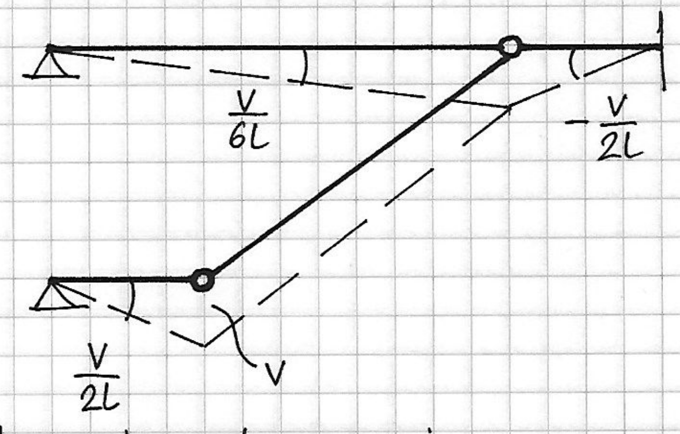
$$Q_A = k_1 \varphi_A = 4\frac{EJ}{L}\varphi_A$$
$$Q_B = k_2 \varphi_B = 3\frac{EJ}{L}\varphi_B$$

Schemat zastępczy



$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \frac{V}{L} \end{bmatrix}$$

Plan przesunięć



Równania równowagi

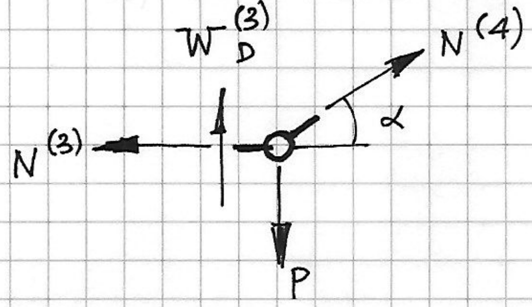
$$\Phi_A^{(1)} + Q_A = 0$$
$$\Phi_B^{(3)} + Q_B = 0$$
$$\Phi_A^{(1)} \cdot \frac{V}{6L} + \Phi_C^{(2)} \cdot \left(-\frac{V}{2L}\right) + \Phi_B^{(3)} \cdot \frac{V}{2L} + P\overline{V} = 0$$

Wzory transformacyjne

$$\Phi_A^{(1)} = \frac{3EJ}{6L}\left[\varphi_A - \frac{V}{6L}\right]$$
$$\Phi_B^{(3)} = \frac{3EJ}{2L}\left[\varphi_B - \frac{V}{2L}\right]$$
$$\Phi_C^{(2)} = \frac{3EJ}{\dots}\left[\frac{V}{\dots}\right]$$

$$\frac{EJ}{L}\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{3}{4} & \frac{55}{72} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \\ \frac{V}{L} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ PL \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A = 0{,}029\,\frac{PL^2}{EJ}\ ; \quad \varphi_B = 0{,}261\,\frac{PL^2}{EJ}\ ; \quad \frac{V}{L} = 1{,}569\,\frac{PL^2}{EJ}$$



$$N^{(4)} + W_D^{(3)}\sin\alpha - P\sin\alpha = 0$$

$$W_D^{(3)} = -\frac{3EJ}{4L}\left[\varphi_B - \frac{V}{2L}\right] = 0{,}392\,P$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

$$N^{(4)} = 0{,}365\,P$$

Zadanie 3

$$w'(\xi) = A_1\sigma - A_2\sigma\sin(\sigma\xi) + A_3\sigma\cos(\sigma\xi)$$
$$w''(\xi) = -A_2\sigma^2\cos(\sigma\xi) - A_3\sigma^2\sin(\sigma\xi)$$
$$w'''(\xi) = A_2\sigma^3\sin(\sigma\xi) - A_3\sigma^3\cos(\sigma\xi)$$

Warunki brzegowe

$w(0)=0$	$w(0)=0$
$\varphi(0)=0$	$\frac{1}{l}w'(0)=0$
$T(1)=kw(1)$	$-\frac{EJ}{l^3}\left[w'''(1)+\sigma^2 w'(1)\right] = kw(1)$
$M(1)=0$	$-\frac{EJ}{l^2}w''(1)=0$

$$A_0 + A_2 = 0$$
$$A_1\sigma + A_3\sigma = 0$$
$$-A_1\sigma^3 = 10A_0 + 10A_1\sigma + 10A_2\cos\sigma + 10A_3\sin\sigma$$
$$-A_2\sigma^2\cos\sigma - A_3\sigma^2\sin\sigma = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 & \sigma \\ 10 & \sigma(10+\sigma^2) & 10\cos\sigma & 10\sin\sigma \\ 0 & 0 & \sigma^2\cos\sigma & \sigma^2\sin\sigma \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}(\sigma)} \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{0}}$$

$$\det \mathbf{C}(\sigma) = -\sigma^3\left[\sin\sigma - 10\sigma\cos\sigma - \sigma^3\cos\sigma\right]$$

$$\det \mathbf{C}(\sigma) = 0 \iff \sigma = 0 \quad \vee \quad \sin\sigma - \sigma\cos\sigma(\sigma^2+10) = 0$$

$$\operatorname{tg}\sigma = \sigma(\sigma^2+10)$$