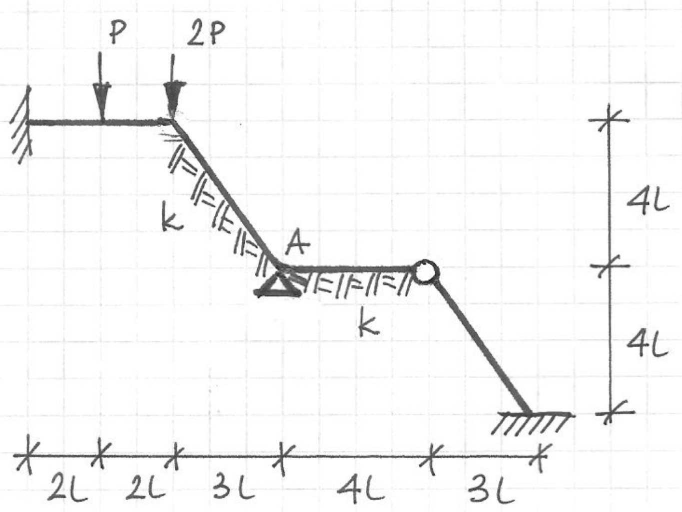
Egzamin z Mechaniki Konstrukcji (MK IPB), 24.6.2016

NAZWISKO, Imię				
rok akademicki zaliczenia ćwiczeń		nr albumu	grupa (IPB / BZ)	tryb studiów (ST / NST)
ocena zadania 1	ocena zadania 2	ocena zadania 3	ocena egzaminu	ocena łączna

Zadanie 1.

$EJ = const.,\qquad k = 0{,}0324\dfrac{EJ}{l^4}$

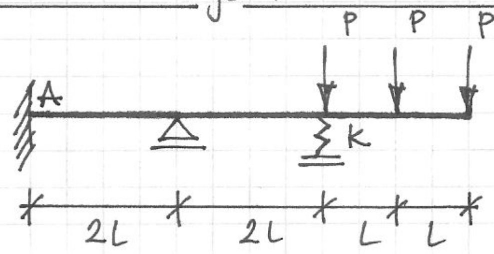
Oblicz pionową składową reakcji w punkcie A w ramie z rys. 1 korzystając z tw. Bettiego.



rys. 1

Zadanie 2.

Znajdź wartość k taką, że moment w utwierdzeniu A w belce z rys. 2 osiąga wartość zerową.



rys. 2

Zadanie 3.

$EJ = const.,\qquad k = \pi^2\dfrac{EJ}{l}$

Wyprowadź warunek określający krytyczną wartość siły P w belce z rys. 3.

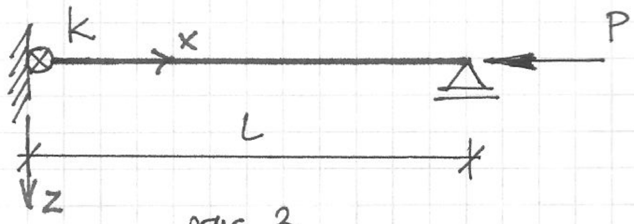
Wskazówka:

Przyjmij, że równanie osi odkształconej jest w postaci

$w(\xi) = A_0 + A_1\sigma\xi + A_2\cos(\sigma\xi) + A_3\sin(\sigma\xi)$

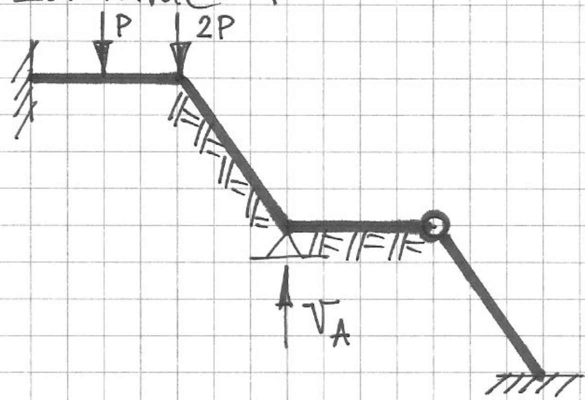
gdzie

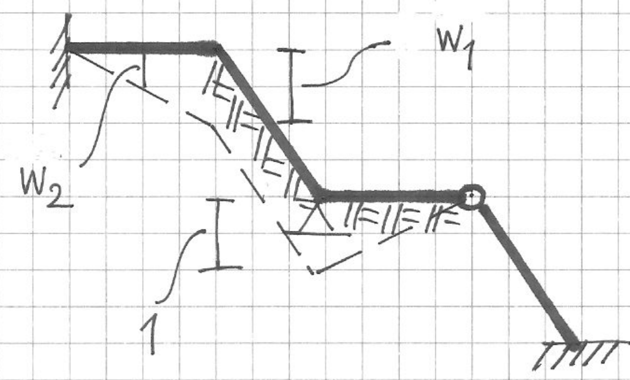
$\xi = \dfrac{x}{l}\ ,\sigma = l\sqrt{\dfrac{P}{EJ}}$



rys. 3

Zadanie 1





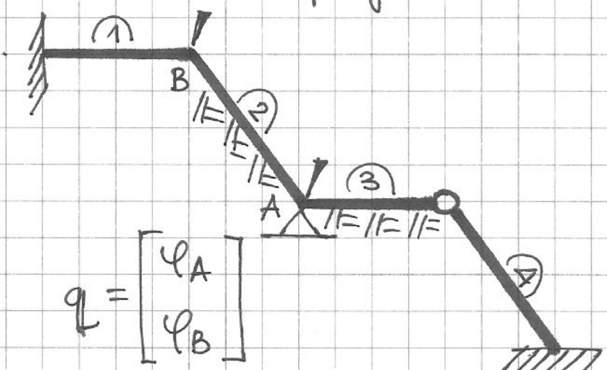
Na mocy tw. Bettiego:

$$-V_A \cdot 1 + P \cdot w_2 + 2P \cdot w_1 = 0$$

$$V_A = P \cdot w_2 + 2P \cdot w_1$$

Obliczenie w_1, w_2:

Schemat zastępczy:



$$q = \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{bmatrix}$$

Równania równowagi:

$$\Phi_A^{(2)} + \Phi_A^{(3)} = 0$$

$$\Phi_B^{(1)} + \Phi_B^{(2)} = 0$$

$$\lambda^{(2)} = 1{,}5 \qquad \lambda^{(3)} = 1{,}2$$

Wzory transformacyjne:

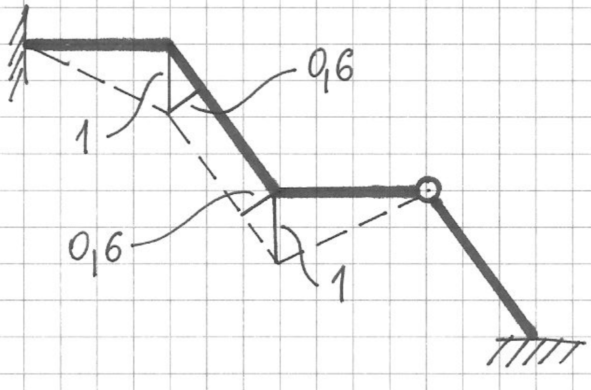
$$\Phi_B^{(1)} = \frac{2EJ}{4L}\left[2\varphi_B\right] + \mathring{\Phi}_B^{(1)}$$

$$\Phi_B^{(2)} = \frac{EJ}{5L}\left[\alpha(1{,}5)\varphi_B + \beta(1{,}5)\varphi_A\right] + \mathring{\Phi}_B^{(2)}$$

$$\Phi_A^{(2)} = \frac{EJ}{5L}\left[\beta(1{,}5)\varphi_B + \alpha(1{,}5)\varphi_A\right] + \mathring{\Phi}_A^{(2)}$$

$$\Phi_A^{(3)} = \frac{EJ}{4L}\left[\alpha'(1{,}2)\varphi_A\right] + \mathring{\Phi}_A^{(3)}$$

Wyjściowy plan przesunięć:



Momenty wyjściowe:

$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{(1)}_{B} = \frac{2EJ}{4L}\left[-3\cdot\frac{1}{4L}\right]$$

$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{(2)}_{B} = \frac{EJ}{5L}\left[\vartheta(1{,}5)\cdot\frac{0{,}6}{5L} - \delta(1{,}5)\,\frac{0{,}6}{5L}\right]$$

$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{(2)}_{A} = \frac{EJ}{5L}\left[\delta(1{,}5)\cdot\frac{0{,}6}{5L} - \vartheta(1{,}5)\,\frac{0{,}6}{5L}\right]$$

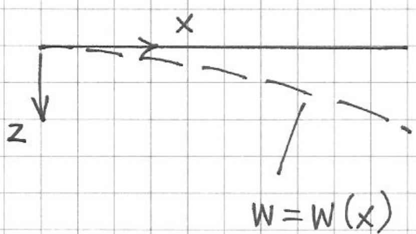
$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{(3)}_{A} = \frac{EJ}{4L}\left[\vartheta'(1{,}2)\cdot\frac{1}{4L}\right]$$

Równania równowagi w postaci macierzowej:

$$\frac{EJ}{L}\begin{bmatrix} 1{,}837 & 0{,}372 \\ 0{,}372 & 1{,}622 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_A \end{bmatrix} = \frac{EJ}{L^2}\begin{bmatrix} 0{,}336 \\ -0{,}192 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_A = -0{,}168\cdot\frac{1}{L} \qquad \varphi_B = 0{,}217\cdot\frac{1}{L}$$

Równanie ugięcia pręta 1



$$w(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

$$w(0) = 0 \qquad w(4L) = 1$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi(4L) = \varphi_B$$

Stąd:

$$w(x) = 0{,}1333\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 0{,}0177\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

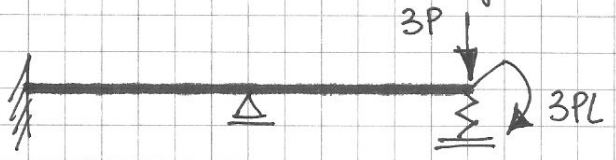
$$w_1 = w(4L) = 1$$

$$w_2 = w(2L) = 0{,}39$$

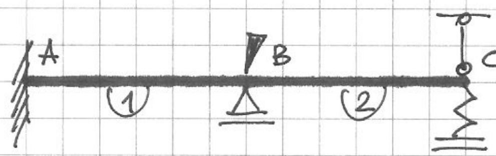
Czyli: $V_A = 2{,}39\,P$

Zadanie 2

Schemat zredukowany

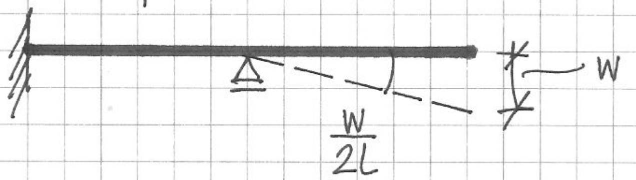


Schemat zastępczy



$$q = \begin{bmatrix} \varphi_B \\ \frac{W}{L} \end{bmatrix}$$

Plan przesunięć



Równania równowagi:

$$\Phi_B^{(1)} + \Phi_B^{(2)} = 0$$

$$\Phi_B^{(2)} \cdot \left(\frac{\overline{W}}{2L}\right) - kW \cdot \overline{W} + 3P \cdot \overline{W} + 3PL \cdot \frac{\overline{W}}{2L} = 0$$

Wzory transformacyjne

$$\Phi_B^{(1)} = \frac{2EJ}{2L}\left[2\varphi_B\right]$$

$$\Phi_B^{(2)} = \frac{3EJ}{2L}\left[\varphi_B - \frac{W}{2L}\right] + \frac{3}{2}PL$$

Stąd

$$\frac{EJ}{L}\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{8}+\tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_B \\ \frac{W}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{21}{4} \end{bmatrix} PL \qquad \tau = \frac{kL^3}{EJ}$$

Rozwiązanie:

$$\varphi_B = \frac{3(9-4\tau)}{2(3+14\tau)} \frac{PL^2}{EJ}$$

$$\frac{W}{L} = \frac{69}{3+14\tau} \frac{PL^2}{EJ}$$

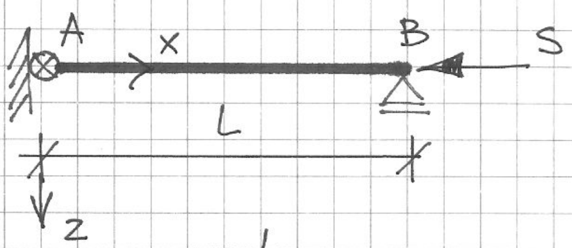
Ze wzoru transformacyjnego $\Phi_B^{(1)}$ widać, że

$$\Phi_B^{(1)} = 0 \iff \varphi_B = 0$$

a więc

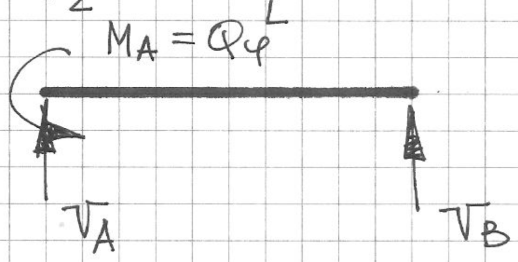
$$\Phi_B^{(1)} = 0 \iff \tau = \frac{9}{4} \longrightarrow k = \frac{9}{4}\frac{EJ}{L^3}$$

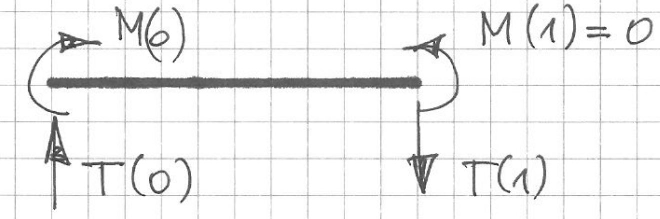
Zadanie 3



$$\sigma^2 = \frac{SL^2}{EJ}$$

$$\xi = \frac{x}{L}$$





$$Q_\varphi^L = k\Delta\varphi = \frac{EJ}{L}\tau\varphi(0)$$

$$w(\xi) = A_0 + A_1\sigma\xi + A_2\cos(\sigma\xi) + A_3\sin(\sigma\xi)$$

warunki brzegowe

$$\left.\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ M(0) &= -Q_\varphi^L \\ w(1) &= 0 \\ M(1) &= 0 \end{aligned}\right| \longrightarrow \begin{aligned} &w(0) = 0 \\ &-\frac{EJ}{L^2}w''(0) = -\frac{EJ}{L}\tau\cdot\frac{1}{L}w'(0) \\ &w(1) = 0 \\ &-\frac{EJ}{L^2}w''(1) = 0 \end{aligned}$$

Stąd

$$A_0 + A_2 = 0$$
$$\frac{EJ}{L^2}\sigma^2 A_2 + \frac{EJ}{L^2}\sigma\pi(A_1 + A_3) = 0$$
$$A_0 + A_1\sigma + A_2\cos\sigma + A_4\sin\sigma = 0$$
$$\frac{EJ}{L^2}\sigma^2\left[A_2\cos\sigma + A_3\sin\sigma\right] = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{EJ}{L^2}\sigma\pi & \frac{EJ}{L^2}\sigma^2 & \frac{EJ}{L^2}\sigma\pi \\ 1 & \sigma & \cos\sigma & \sin\sigma \\ 0 & 0 & \frac{EJ}{L^2}\sigma^2\cos\sigma & \frac{EJ}{L^2}\sigma^2\sin\sigma \end{bmatrix}}_{\mathbb{C}(\sigma)} \underbrace{\begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbb{0}}$$

$$\det\mathbb{C}(\sigma) = 0 \rightarrow \frac{EJ^2}{L^4}\sigma^3\left[\pi\sigma\cos\sigma - (\pi + \sigma^2)\sin\sigma\right] = 0 \rightarrow \mathrm{tg}\,\sigma = \frac{\pi\sigma}{\pi + \sigma^2}$$