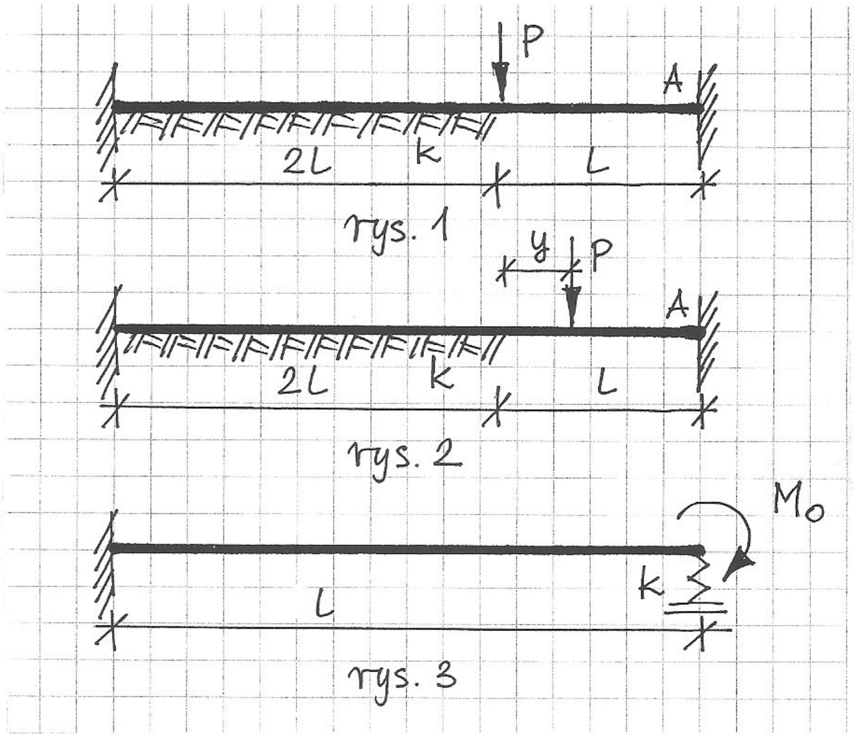
Egzamin z Mechaniki Konstrukcji (MK IPB), 19.6.2016

NAZWISKO, Imię				
ocena zadania 1	ocena zadania 2	ocena zadania 3	ocena egzaminu	ocena łączna

Zadanie 1.

$EJ = const.,\qquad k = 26{,}22\dfrac{EJ}{l^4}$

Oblicz moment w utwierdzeniu A
w belce z rys. 1



Zadanie 2.

$EJ = const.,\qquad k = 26{,}22\dfrac{EJ}{l^4}$

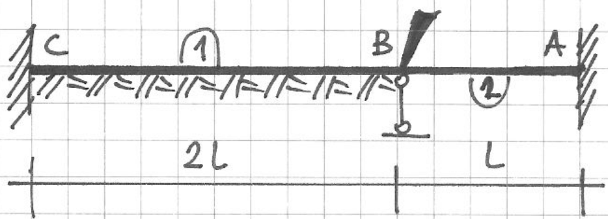
Znajdź takie położenie siły P na odcinku niepodpartym sprężyście w konstrukcji z rys. 2, że moment w utwierdzeniu A osiąga wartość ekstremalną.

Zadanie 3.

$EJ = const.,\qquad k = 5\dfrac{EJ}{l^3}$

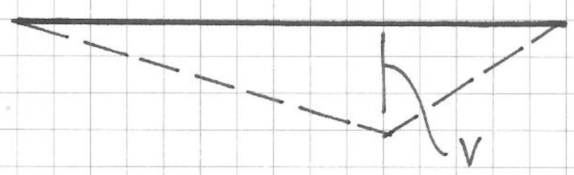
Zapisz funkcję ugięcia pręta z rys. 3.

Zadanie 1



$$q = \begin{bmatrix} \varphi \\ \frac{V}{L} \end{bmatrix}$$

Plan przesunięć



$$\lambda^{(1)} = 2\lambda = 3{,}2$$

$$\lambda = L\sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = 1{,}6$$

Równania równowagi:

$$\Phi_B^{(1)} + \Phi_B^{(2)} = 0$$

$$W_B^{(1)} \cdot \overline{V} + W_B^{(2)} \cdot \overline{V} = P \cdot \overline{V}$$

Wzory transformacyjne:

$$\Phi_B^{(1)} = \frac{EJ}{2L}\left[\alpha(3{,}2)\varphi - \vartheta(3{,}2)\frac{V}{2L}\right]$$

$$\Phi_B^{(2)} = \frac{EJ}{L}\left[4\varphi + 6\frac{V}{L}\right]$$

$$W_B^{(1)} = -\frac{EJ}{4L^2}\left[\vartheta(3{,}2)\varphi - \gamma(3{,}2)\frac{V}{2L}\right]$$

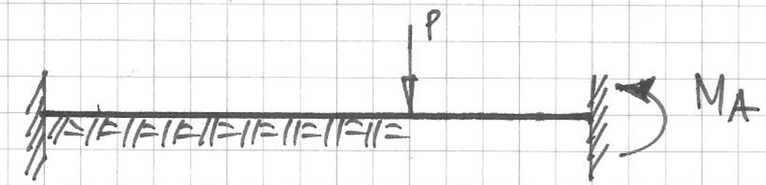
$$W_B^{(2)} = \frac{EJ}{L^2}\left[6\varphi + 12\frac{V}{L}\right]$$

Stąd:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 6{,}419 + 4\right)\varphi + \left(-\frac{1}{4}\cdot 20{,}481 + 6\right)\frac{V}{L} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{4}\cdot 20{,}481 + 6\right)\varphi + \left(\frac{1}{8}\cdot 131{,}562 + 12\right)\frac{V}{L} = \frac{PL^2}{EJ}$$

$$\rightarrow \quad \varphi = -0{,}0037\frac{PL^2}{EJ}, \qquad \frac{V}{L} = 0{,}0353\frac{PL^2}{EJ}$$



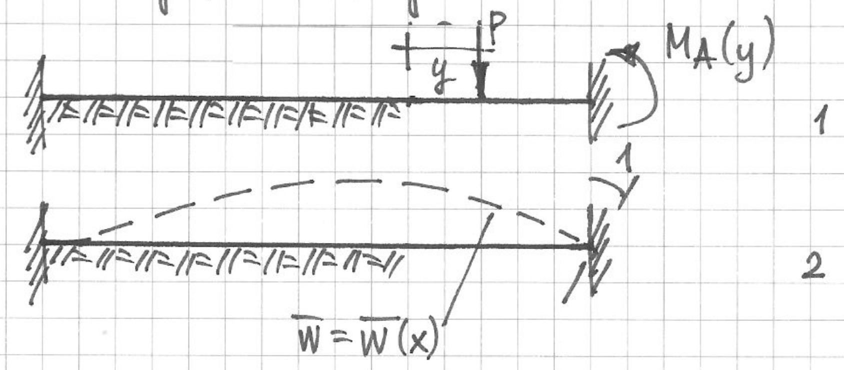
$$M_A = -\Phi_A^{(2)}$$

$$= -\frac{EJ}{L}\left[2\varphi + 6\frac{V}{L}\right] = -0{,}205\,PL$$

Zadanie 2

Schemat geometrycznie wyznaczalny jak w zadaniu 1

Na mocy tw. Bettiego:

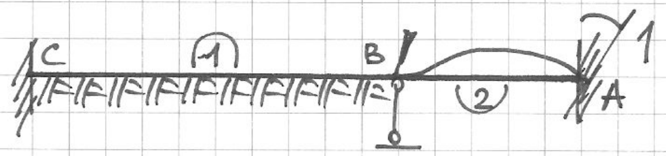


$$L_{12} = L_{21}$$

$$-M_A(y)\cdot 1 + P\cdot \overline{W}(y) = 0$$

$$M_A(y) = P\cdot \overline{W}(y)$$

Wyznaczamy $\overline{W}(y)$, t.j. wartość funkcji $\overline{W}$ w miejscu położenia siły P.



$$\overset{\circ}{\Phi}{}^{(2)}_{B} = \frac{EJ}{L}\left[2\cdot 1\right]$$

$$\overset{\circ}{W}{}^{(2)}_{B} = \frac{EJ}{L^2}\left[6\cdot 1\right]$$

Równania równowagi:

$$\Phi^{(1)}_{B} + \Phi^{(2)}_{B} = 0$$

$$W^{(1)}_{B}\cdot \overline{V} + W^{(2)}_{B}\cdot \overline{V} = 0$$

Wzory transformacyjne:

$$\Phi^{(1)}_{B} = \text{jak w zadaniu 1}$$

$$\Phi^{(2)}_{B} = \frac{EJ}{L}\left[4\varphi + 6\frac{V}{L}\right] + 2\frac{EJ}{L}$$

$$W^{(1)}_{B} = \text{jak w zadaniu 1}$$

$$W^{(2)}_{B} = \frac{EJ}{L^2}\left[6\varphi + 12\frac{V}{L}\right] + 6\frac{EJ}{L^2}$$

Rozwiązanie układu równań równowagi:

$$\varphi = -0{,}198$$

$$\frac{V}{L} = -0{,}205$$

Wprowadzamy zmienne bezwymiarowe: $\xi = \frac{x}{L}$ $\quad \eta = \frac{y}{L}$

Wtedy:

$$\overline{W}(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3$$

$$M_A(\eta) = P\cdot \overline{W}(\eta)$$

ξ – parametryzuje odcinek $[0,L]$

η – parametryzuje położenie P

Warunki brzegowe:

$\overline{W}(0) = -0{,}205\,L$ $\quad$ $\overline{W}(1) = 0$

$\overline{\varphi}(0) = -0{,}198$ $\quad$ $\overline{\varphi}(1) = 1$

$\rightarrow$

$\overline{W}(0) = -0{,}205\,L$ $\quad$ $\overline{W}(1) = 0$

$\frac{1}{L}\overline{W}'(0) = -0{,}198$ $\quad$ $\frac{1}{L}\overline{W}'(1) = 1$

$\rightarrow$

$A_0 = -0{,}205$

$A_1 = -0{,}198$

$A_2 = 0{,}01$

$A_3 = 0{,}393$

A zatem:

$$\overline{w}(\xi) = L \cdot f(\xi) \quad , \quad f(\xi) = -0{,}205 - 0{,}198\,\xi + 0{,}01\,\xi^2 + 0{,}393\,\xi^3$$

$$M_A(\eta) = PL \cdot f(\eta)$$

Moment M_A osiąga ekstremum po obciążeniu belki w punkcie o odciętej $y^* = \eta^* L$. Warunek konieczny ekstremum:

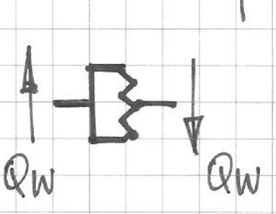
$$\left.\frac{dM_A}{d\eta}\right|_{\eta=\eta^*} = 0 \longrightarrow \left.\frac{df}{d\eta}\right|_{\eta=\eta^*} = 0$$

Stąd:

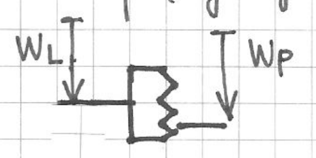
$$\eta^* = 0{,}401 \longrightarrow y^* = 0{,}401 \cdot L$$

Zadanie 3

Schemat połączenia sprężystego ze względu na przesuw



siły

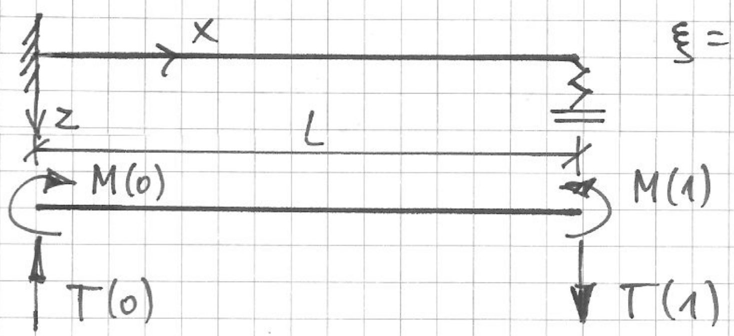


przemieszczenia

$$\Delta W = W_P - W_L = 0 - w(1)$$

$$Q_W = \frac{EJ}{L^2}\,\tau\,\frac{\Delta W}{L} \qquad \tau = \frac{kL^3}{EJ}$$

$$= -\frac{EJ}{L^2} \cdot 5 \cdot w(1)$$



$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$w(\xi) = A_0 + A_1\xi + A_2\xi^2 + A_3\xi^3$$

war. brzegowe

1) $w(0) = 0$
2) $\varphi(0) = 0$
3) $M(1) = -M_0$
4) $T(1) = Q_W$

1) $A_0 = 0$
2) $A_1 = 0$
3) $2A_2 + 6A_3 = \dfrac{M_0 L^2}{EJ}$
4) $6A_3 = 5(A_0 + A_1 + A_2 + A_3)$

$$w(\xi) = \frac{1}{32}\frac{M_0 L^2}{EJ}\left(\xi^2 + 5\xi^3\right)$$